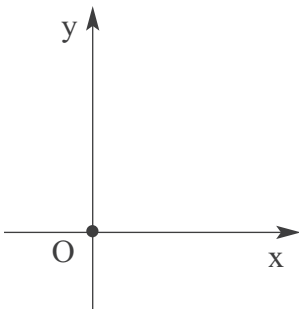


ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅՈՒՆ
9-րդ
ԴԱՍԱՐԱՆԻ ԴԱՍԱԳԻՐՔ

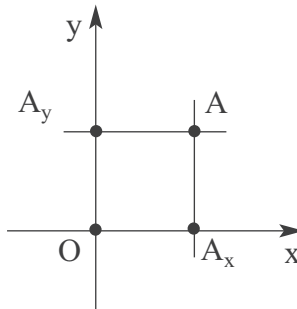
Կետերին կորդինատների վերագրումը, որն առաջարկեց ֆրանսիացի մեծ մաթեմատիկոս և փիլիսոփա Ռենե Դեկարտը (1596–1650), իսկական հեղաշրջում կատարեց երկրաչափության մեջ: Այսօր ամենուր, տեսական թե գործնական հետազոտությունների ընթացքում, լայնորեն կիրառվում է կորդինատների հասկացությունը: Այն հնարավորություն է տալիս երկրաչափական գծերը, պատկերները արտահայտել կամ նկարագրել հանրահաշվական հավասարումներով, առնչություններով: Այլ կերպ ասած, կորդինատների օգնությամբ որոշ երկրաչափական խնդիրների լուծումը քերվում է հանրահաշվական խնդիրների լուծման, և կիրառվում են հանրահաշվական մեթոդներ:

§ 1. ԴԵԿԱՐՏՅԱՆ ԿՈՐՐԴԻՆԱՏՆԵՐ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ

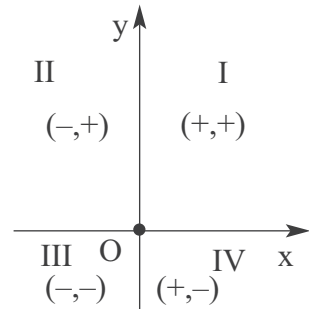
1.1. Կորդինատների ուղղանկյուն համակարգ: Հարթության վրա դիտարկենք երկու փոխուղղահայաց ուղիղներ, որոնց հատման կետը նշանակենք O -ով: Այդ ուղիղները անվանենք կորդինատների առանցքներ (նկ. 1.1): Ընդ որում, նրանցից մեկն անվանենք x -երի կամ աբսցիսների առանցք (այն սովորաբար հորիզոնական է), իսկ մյուսը՝ y -ների կամ օրդինատների առանցք: O կետն անվանենք կորդինատների սկզբնակետ: O կետն առանցքներից յուրաքանչյուրը տրոհում է երկու կիսաառանցքների: Պայմանավորվենք նրանցից մեկն անվանել դրական կիսաառանցք, նշելով այն սլաքով, իսկ մյուսը՝ բացասական կիսաառանցք:



նկ. 1.1



նկ. 1.2



նկ. 1.3

Կոորդինատների առանցքների վրա ընտրենք նույն մասշտաբի միավորը:

Փոխադրված հայացք ուղիղների յուրաքանչյուր այսպիսի զույգ հարթության վրա տալիս է դեկարտյան կոորդինատների համակարգ, այսինքն՝ հարթության յուրաքանչյուր A կետի համապատասխանության մեջ է դնում կարգավորված մի թվագույգ՝ կետի կոորդինատները՝ x արգիսը և y օրդինատը: Դա կատարվում է հետևյալ կանոնով:

A կետով տանենք կոորդինատների առանցքներին զուգահեռ ուղիղներ (նկ. 1.2): Օրդինատների առանցքին զուգահեռ ուղիղի հատման կետը x -երի առանցքի հետ նշանակենք A_x -ով, իսկ արգիսների առանցքին զուգահեռ ուղիղի հատման կետը y -ների առանցքի հետ՝ A_y -ով:

A կետի արգիս կանվանենք x թիվը, որի բացարձակ արժեքը հավասար է O կետի հեռավորությանը A_x -ից, այսինքն՝ $|OA_x|$: x թիվը դրական է, եթե A_x -ն ընկած է դրական կիսաառանցքի վրա, և բացասական, եթե A_x -ն ընկած է բացասական կիսաառանցքի վրա: Եթե A կետը գտնվում է օրդինատների առանցքի վրա, ապա x -ը հավասար է զրոյի:

A կետի օրդինատ կանվանենք y թիվը, որի բացարձակ արժեքը հավասար է O կետի հեռավորությանը A_y -ից, այսինքն՝ $|OA_y|$: y թիվը դրական է, եթե A_y -ն ընկած է դրական կիսաառանցքի վրա, և բացասական, եթե A_y -ն ընկած է բացասական կիսաառանցքի վրա: Եթե A կետը գտնվում է արգիսների առանցքի վրա, ապա y -ը հավասար է զրոյի:

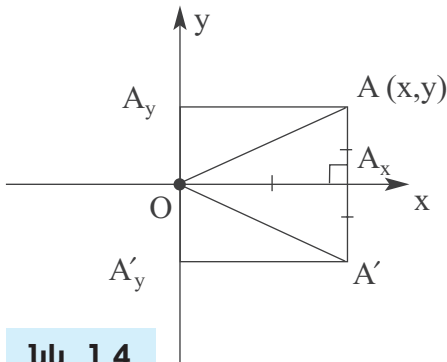
Կետի կոորդինատները կգրենք փակագծերում, կետի տառանշանի մոտ, օրինակ՝ $A(x, y)$, նշենք, որ առաջին տեղում գրվում է A կետի արգիսը, իսկ երկրորդ տեղում՝ օրդինատը:

Այսպիսով, հարթության յուրաքանչյուր կետին համապատասխանում է մի թվագույգ, և հակառակը՝ յուրաքանչյուր թվագույգի համապատասխանում է հարթության մի կետ: Ընդ որում կարևոր է, թե ինչ կարգով են գրված այդ թվերը: Օրինակ՝ $A(1, 2)$ և $B(2, 1)$ կետերը հարթության տարբեր կետեր են: Այս պատճառով մենք օգտագործում ենք կարգավորված թվագույգ անվանումը:

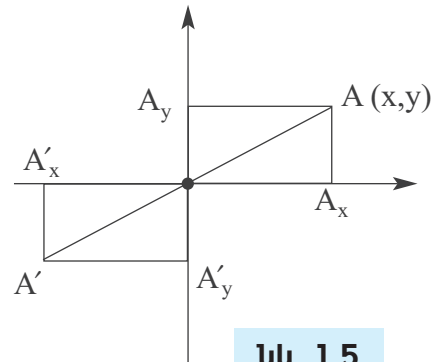
Նկատենք, որ կոորդինատների առանցքները հարթությունը տրոհում են չորս քառորդների՝ I, II, III, IV, ըստ այդ քառորդներին պատկանող կետերի կոորդինատների նշանների (նկ. 1.3): Մասնավորապես, I քառորդին պատկանող բոլոր կետերի կոորդինատները դրական են, II քառորդին պատկանող կետերի արգիսները բացասական են, իսկ օրդինատները՝ դրական, III քառորդին պատկանող կետերի և՛ արգիսները, և՛ օրդինատները բացասական են, IV քառորդին պատկանող կետերի արգիսները դրական են, իսկ օրդինատները՝ բացասական: Նկատենք, որ x -երի առանցքի կետերի օրդինատները հավասար են զրոյի, իսկ y -ների առանցքի կետերի արգիսներն են հավասար զրոյի:

Հարթությունը, որի վրա մուծված են x և y կոորդինատները, կանվա-
նենք xy հարթություն: Այդ հարթության վրա x և y կոորդինատներով
կետը կնշանակենք նաև (x, y) -ով:

**1.2. Համաչափություն կոորդինատների առանցքների և կոորդի-
նատների սկզբնակետի նկատմամբ:** Դիցուք հարթության վրա տրված
է կոորդինատների xy համակարգ և $A(x, y)$ կետը (նկ. 1.4): Գտնենք A -ին
համաչափ կետերի կոորդինատները x -երի և y -ների առանցքների,
ինչպես նաև կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ:



նկ. 1.4



նկ. 1.5

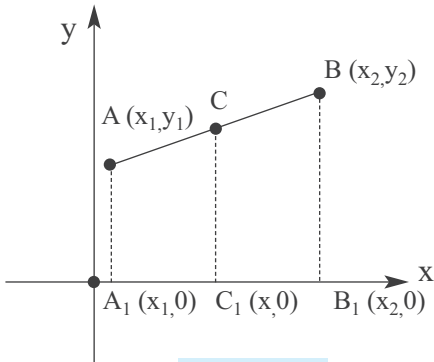
$A(x, y)$ կետի x -երի առանցքի նկատմամբ համաչափ A' կետն ունի $(x, -y)$
կոորդինատներ (նկ. 1.4): Իսկապես, A' կետի արեցիսը հավասար է A
կետի արեցիսին, քանի որ A_x և A'_x կետերը համընկնում են՝ ըստ x -երի
նկատմամբ առանցքային համաչափության սահմանման: A' կետի օրդի-
նատի բացարձակ արժեքը հավասար է A կետի օրդինատի բացարձակ
արժեքին, ըստ համաչափության սահմանման և Թալեսի թեորեմի: Այդ
օրդինատները տարբերվում են նշանով, քանի որ A_y և A'_y կետերը
գտնվում են O կետի տարբեր կողմերում: Այսպիսով, $A'(x, -y)$ կետը $A(x, y)$
կետի համաչափ կետն է x -երի առանցքի նկատմամբ:

Նման ձևով կարելի է ապացուցել, որ $A'(-x, y)$ կետը $A(x, y)$ կետի
համաչափ կետն է y -ների առանցքի նկատմամբ:

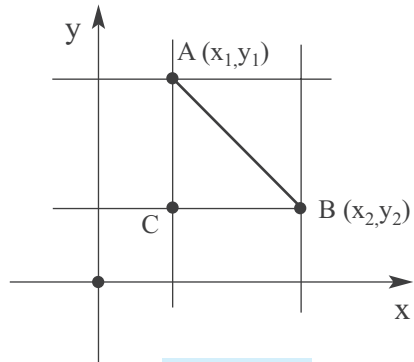
Այժմ գտնենք $A(x, y)$ կետի համաչափ կետը կոորդինատների $O(0, 0)$
սկզբնակետի նկատմամբ (նկ. 1.5): Հեշտ է ապացուցել (օգտվելով համա-
պատասխան եռանկյունների հավասարությունից), որ $O(0,0)$ կետի նկատ-
մամբ A կետի համաչափ A' կետի արեցիսի և օրդինատի բացարձակ
արժեքները հավասար են համապատասխանաբար A կետի արեցիսի և
օրդինատի բացարձակ արժեքներին, սակայն նրանք տարբերվում են
նշաններով: Այսպիսով, $A(x, y)$ կետի կենտրոնային համաչափ կետը
 $O(0,0)$ կետի նկատմամբ $A'(-x, -y)$ կետն է:

1.3. Հատվածի միջնակետի կոորդինատները: Դիցուք xy հարթու-
թյան վրա տրված են $A(x_1, y_1)$ և $B(x_2, y_2)$ կետերը: Գտնենք $[AB]$ հատվա-
ծի C միջնակետի x և y կոորդինատները (նկ. 1.6): Դիտարկենք այն

դեպքը, երբ $[AB]$ հատվածը զուգահեռ չէ y -ների առանցքին: A , B և C կետերով տանենք y -ների առանցքին զուգահեռ ուղիղներ:



Նկ. 1.6



Նկ. 1.7

Նրանց հատման կետերը x -երի առանցքի հետ նշանակենք համապատասխանաբար $A_1(x_1, 0)$ -ով, $B_1(x_2, 0)$ -ով և $C_1(x, 0)$ -ով: Համաձայն Թալեսի թեորեմի՝ C_1 կետը $[A_1B_1]$ -ի միջնակետն է, քանի որ C -ն $[AB]$ -ի միջնակետն է, այսինքն՝ $|A_1C_1| = |C_1B_1|$: Սակայն $|A_1C_1| = |x - x_1|$, իսկ $|C_1B_1| = |x_2 - x|$: Հետևաբար՝ $|x - x_1| = |x_2 - x|$: Հնարավոր է երկու դեպք՝ $x - x_1 = x_2 - x$ կամ $x - x_1 = -(x_2 - x)$: Երկրորդ դեպքում կստանանք $x_1 = x_2$, որը հնարավոր չէ, քանի որ $[AB]$ -ն զուգահեռ չէ y -ների առանցքին: Ուրեմն՝ տեղի ունի առաջին դեպքը: Ստացանք, որ

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}: \quad (1.1)$$

Երբ $[AB]$ հատվածը զուգահեռ է y -ների առանցքին, ապա A , B , C կետերն ունեն նույն աբսցիսը՝ $x_1 = x_2 = x$: Նկատենք, որ (1.1) բանաձևը ճիշտ է նաև այս դեպքում:

Նույն կերպ, A , B , C կետերով տանելով զուգահեռ ուղիղներ x -երի առանցքին, կստանանք, որ

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad (1.2)$$

ինչը և պահանջվում էր ստանալ:

1.4. Կետերի հեռավորությունը կոորդինատներով: Դիցուք xy հարթության վրա տրված են երկու կետեր: Արտահայտենք այդ կետերի հեռավորությունը նրանց կոորդինատներով:

Թեորեմ 1.1:

Հարթության վրա տրված $A(x_1, y_1)$ և $B(x_2, y_2)$ կետերի հեռավորությունը հաշվվում է հետևյալ բանաձևով.

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}: \quad (1.3)$$

Ապացուցում: Դիտարկենք նախ այն դեպքը, երբ $x_1 \neq x_2$ և $y_1 \neq y_2$: A և B կետերով տանենք կոորդինատների առանցքներին զուգահեռ ուղիղներ և նրանց հատման կետերից մեկը (նկ. 1.7) նշանակենք C-ով: Նկատենք, որ A և C կետերի հեռավորությունը հավասար է $|y_1 - y_2|$, իսկ B և C կետերի հեռավորությունը՝ $|x_1 - x_2|$: ABC ուղղանկյուն եռանկյան նկատմամբ կիրառելով Պյութագորասի թեորեմը՝ կստանանք՝

$$|AB|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2,$$

որից բխում է (1.3) բանաձևը: (1.3) բանաձևը ճիշտ է մնում նաև այն դեպքում, երբ տեղի ունի $x_1 = x_2$ կամ $y_1 = y_2$ պայմանը: Իրոք, եթե $x_1 = x_2$, $y_1 \neq y_2$, ապա $|AB|$ -ն հավասար է $|y_1 - y_2|$ -ի: Նույն արդյունքն է տալիս նաև (1.3) բանաձևը: Նման ձևով ապացուցվում է նաև $x_1 \neq x_2$, $y_1 = y_2$ դեպքը, իսկ $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ դեպքում $|AB| = 0$: Թեորեմն ապացուցված է:

Առաջադրանքներ և խնդիրներ

1. xy հարթության վրա նշեք $A(2,7)$, $B(-1,6)$, $C(-3,-2)$, $D(2,-4)$ կետերը:
2. A կետը գտնվում է O սկզբնակետով xy հարթության x -երի դրական կիսաառանցքի վրա, իսկ B կետը՝ y -ների դրական կիսաառանցքի վրա: Գտեք ABO եռանկյան գագաթների կոորդինատները, եթե $|OA|=3$, $|OB|=4$:
3. A կետը գտնվում է O սկզբնակետով xy հարթության դրական կիսաառանցքի վրա, իսկ B կետը՝ y -ների բացասական կիսաառանցքի վրա: Գտեք ABO եռանկյան գագաթների կոորդինատները, եթե $|OA|=3$, $|OB|=5$:
4. xy հարթության վրա $A(-2,5)$ կետից տարված է ուղղահայաց x -երի առանցքին: Գտեք ուղղահայացի հիմքի կոորդինատները:
5. xy հարթության վրա $A(-3,-4)$ կետից տարված է ուղղահայաց y -ների առանցքին: Գտեք ուղղահայացի հիմքի կոորդինատները:
6. Գտեք $A(-3,4)$ կետի հեռավորությունը y -ների առանցքից:
7. xy հարթության վրա տրված է ABCD քառակուսի այնպես, որ A գագաթի կոորդինատներն են $(-2,2)$ -ը, և $O(0,0)$ սկզբնակետը այդ քառակուսու անկյունագծերի հատման կետն է: Գտեք B, C, D գագաթների կոորդինատները:
8. Տրված են ABCD զուգահեռագծի երեք գագաթներ՝ $A(1,0)$, $B(2,3)$, $C(3,2)$: Գտեք D գագաթի կոորդինատները:
9. Ապացուցեք, որ $A(-1,-2)$, $B(2,-5)$, $C(1,-2)$, $D(-2,1)$ գագաթներով ABCD քառանկյունը զուգահեռագիծ է: Գտեք նրա անկյունագծերի հատման կետի կոորդինատները:
10. Տրված են $A(1,0)$, $C(-1,2)$ կետերը: Գտեք B կետի կոորդինատները, եթե C-ն $[AB]$ հատվածի միջնակետն է:
11. Տրված են $A(0,1)$ և $B(5,-3)$ կետերը: Գտեք C և D կետերի կոորդինատները, եթե հայտնի է, որ B կետը $[AC]$ հատվածի միջնակետն է, իսկ D կետը՝ $[BC]$ հատվածի միջնակետը:

12. Տրված են $A(1,-2)$ և $B(4,4)$ կետերը: Գտնե՛ք $[AB]$ հատվածի M և N կետերի կոորդինատները, եթե հայտնի է, որ $[AM]=[MN]=[NB]$:
13. Տրված են $A(0,-3)$; $B(2,4)$ և $C(4,2)$ կետերը: Գտնե՛ք ABC եռանկյան միջնագծերի հատման կետի կոորդինատները:
14. Գտնե՛ք $A(2,7)$ և $B(-3,2)$ կետերի հեռավորությունը:
15. Գտնե՛ք $A(4,0)$, $B(-2,0)$, $C(-2,-1)$ գագաթներով եռանկյան պարագիծը:
16. Ապացուցե՛ք, որ $A(0,1)$, $B(1,-4)$, $C(5,2)$ գագաթներով եռանկյունը հավասարասրուն է:
17. Ապացուցե՛ք, որ $A(-3,-1)$, $B(1,-1)$, $C(1,-3)$, $D(-3,-3)$ գագաթներով $ABCD$ քառանկյունն ուղղանկյուն է:
18. x -երի առանցքի վրա գտնե՛ք $A(1,2)$ և $B(2,3)$ կետերից հավասարահեռ կետը:

§ 2. ՈՒՂՂԻ ԵՎ ՇՐՋԱՆԱԳԾԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ

2.1. Երկրաչափական պատկերի հավասարումը: Դիտարկենք x և y փոփոխականներով որևէ հավասարում: Դիցուք (x_0, y_0) թվագույգը բավարարում է այդ հավասարմանը, այսինքն՝ եթե հավասարման մեջ x -ի փոխարեն տեղադրենք x_0 , իսկ y -ի փոխարեն՝ y_0 , ապա կստանանք հավասարություն: Օրինակ՝ $(1,2)$ թվագույգը բավարարում է $x^2+y^2=5$ հավասարմանը: xy կոորդինատների հարթության վրա (x_0, y_0) գույգը կետ է, որի կոորդինատներն են այդ թվերը:

Սահմանում

Հարթության վրա տրված **պատկերի հավասարում** կոչվում է x և y փոփոխականներով այն հավասարումը, որին բավարարող յուրաքանչյուր (x_0, y_0) թվագույգ պատկերի որևէ կետի կոորդինատներն են, և հակադարձը՝ պատկերի յուրաքանչյուր կետի կոորդինատները բավարարում են այդ հավասարմանը:

Հիմնականում դիտարկվում են իրար հակադարձ երկու խնդիրներ:

1. Գտնել պատկերը, որը համապատասխանում է տրված հավասարմանը:

Այսպիսի խնդիրներ դիտարկվում են հանրահաշվի դասընթացում, օրինակ՝ գծել տրված ֆունկցիայի գրաֆիկը:

2. Գտնել տրված պատկերի հավասարումը:

Նման խնդիրներ առաջանում են, երբ ցանկանում ենք կոորդինատների կիրառմամբ լուծել երկրաչափական խնդիրներ:

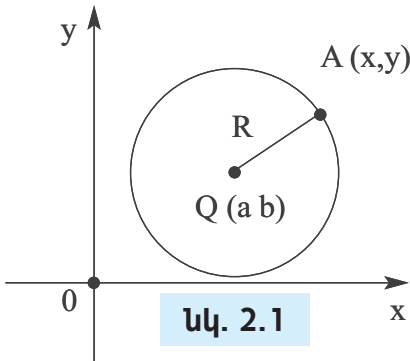
Հետագայում, հիմնականում գործ կունենանք միայն երկու հարթ պատկերների՝ ուղղի և շրջանագծի հետ: Գտնենք նրանց հավասարումները:

2.2 Շրջանագծի հավասարումը: Գտնենք $Q(a,b)$ կենտրոնով և R շառավղով շրջանագծի հավասարումը (նկ. 2.1):

Թեորեմ 2.1:

Q(a,b) կենտրոնով և R շառավղով շրջանագծի հավասարումն է՝ $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$: **(2.1)**

Ապացուցում: Դիցուք $A(x,y)$ կետն այդ շրջանագծի կամայական կետ է: A կետի հեռավորությունը Q կենտրոնից հավասար է R -ի: Համաձայն (1.3) բանաձևի՝ A կետից Q կետը հեռավորության քառակուսին հավասար է $(x-a)^2+(y-b)^2$: Այսպիսով, շրջանագծի յուրաքանչյուր A կետի x, y կոորդինատները բավարարում են (2.1) հավասարմանը:

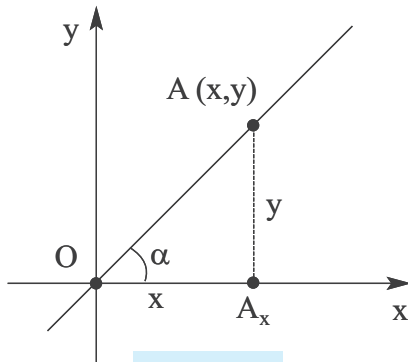
**Նկ. 2.1**

Մյուս կողմից՝ ցանկացած $A(x,y)$ կետ, որի կոորդինատները բավարարում են (2.1) հավասարմանը, պատկանում է այդ շրջանագծին, քանի որ նրա հեռավորությունը $Q(a,b)$ կետից հավասար է R -ի:

Թեորեմն ապացուցված է:

Նկատենք, որ եթե շրջանագծի կենտրոնը կոորդինատների սկզբնակետն է, ապա շրջանագծի հավասարումն ունի այս տեսքը՝ $x^2+y^2=R^2$:

2.3. Ուղղի հավասարումը, որն անցնում է կոորդինատների սկզբնակետով: Դիտարկենք ուղիղ, որն անցնում է կոորդինատների $O(0,0)$

**Նկ. 2.2**

սկզբնակետով և ուղղահայաց չէ x -երի առանցքին (նկ. 2.2): Այդ ուղիղը $O(0,0)$ կետով տրոհվում է երկու ճառագայթների: α -ով նշանակենք այն անկյունը, որը կազմված է ճառագայթով, որն ընկած է I կամ II քառորդներում, և x -երի դրական կիսաառանցքով: α -ն փոփոխվում է 0° -ից 180° , ընդ որում մենք բացառում ենք $\alpha = 90^\circ$ դեպքը:

$\operatorname{tg} \alpha$ -ն նշանակենք k -ով, այսինքն՝ $k = \operatorname{tg} \alpha$: Պարզ է, որ $k > 0$, երբ $0^\circ < \alpha < 90^\circ$

(ուղիղն անցնում է I և III քառորդներով) և $k < 0$, երբ $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ (ուղիղն անցնում է II և IV քառորդներով):

Սահմանում

k թիվը կոչվում է **ուղղի անկյունային գործակից**:

Թեորեմ 2.2:

Կոորդինատների սկզբնակետով անցնող, y -ների առանցքի հետ չհամընկնող ուղղի հավասարումն է

$$y = kx, \quad (2.2)$$

որտեղ k -ն այդ ուղղի անկյունային գործակիցն է:

Ապացուցում: Դիցուք $A(x,y)$ -ը այդ ուղղի կամայական կետ է: tg -ի սահմանումից և OAA_x եռանկյունուց, որտեղ A_x -ը A կետից x -երի առանցքին տարված ուղղահայացի հիմքն է (նկ.2.2), ունենք.

$$k = tg\alpha = \frac{y}{x}, \quad \text{կամ} \quad y = kx:$$

Հակառակը՝ եթե $A(x,y)$ կետի կոորդինատները բավարարում են (2.2) հավասարմանը, ապա $A(x,y)$ կետը պատկանում է ուղղին, քանի որ այդ դեպքում $\angle OAA_x = \alpha$: Թեորեմն ապացուցված է:

Հեշտ է նկատել, որ $x=0$ -ն y -ների առանցքի հետ համընկնող ուղղի հավասարումն է:

2.4. Ուղղի հավասարումը ընդհանուր դեպքում: Դիտարկենք g ուղիղը, որն ուղղահայաց չէ x -երի առանցքին: Գտնենք այդ ուղղի հավասարումը: Նշանակենք g ուղղի և y -ների առանցքի հետ հատման կետը $P(0,b)$ -ով (նկ. 2.3): Կոորդինատների $O(0,0)$ սկզբնակետով տանենք g ուղղին զուգահեռ g_1 ուղիղը:

Դիտարկենք երկու կետեր՝ $A(x,y)$ և $A_1(x,y_1)$ միևնույն x արժեքիսով, որոնք գտնվում են համապատասխանաբար g և g_1 ուղիղների վրա:

Համաձայն (2.2) բանաձևի՝ ունենք $y_1 = kx$, որտեղ k -ն g_1 ուղղի անկյունային գործակիցն է: $OPAA_1$ քառանկյունը զուգահեռագիծ է: Հետևաբար՝ A կետի օրդինատը հավասար է A_1 կետի օրդինատին գումարած b , որտեղ b -ն $P(0,b)$ կետի օրդինատն է: Այսպիսով՝ **g ուղղի հավասարումն ունի հետևյալ տեսքը՝**

$$y = kx + b, \quad (2.3)$$

որտեղ k -ն g ուղղի անկյունային գործակիցն է ($k = tg\alpha$), իսկ b -ն g ուղղի և y -ների առանցքի հատման կետի օրդինատն է (նկ. 2.3):

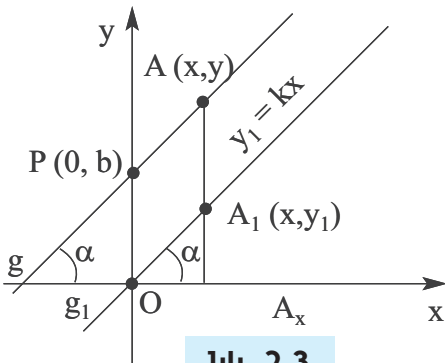
Եթե g ուղիղն ուղղահայաց է x -երի առանցքին և հատում է այդ առանցքը $B(a,0)$ կետում (նկ. 2.4), ապա g ուղղի հավասարումն է

$$x = a: \quad (2.4)$$

Կատարենք հետևյալ հետևությունը: Առաջին աստիճանի յուրաքանչյուր հավասարում, այսինքն՝

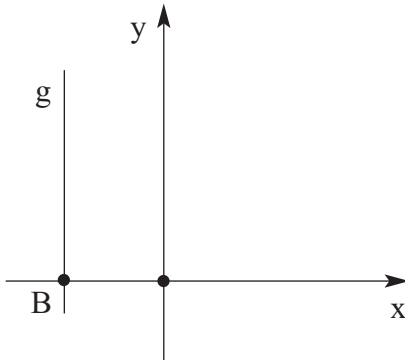
$$ax + by + c = 0, \quad (2.5)$$

որտեղ a և b գործակիցները միաժամանակ 0 չեն, ուղղի հավասարում է (նկ. 2.5): Իրոք, եթե $b \neq 0$, ապա (2.5) կարելի է գրել $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ տեսքով, կամ $y = kx - \frac{c}{b}$, որը k անկյունային գործակից ունեցող $P\left(0, -\frac{c}{b}\right)$ կետով անցնող ուղղի հավասարումն է:

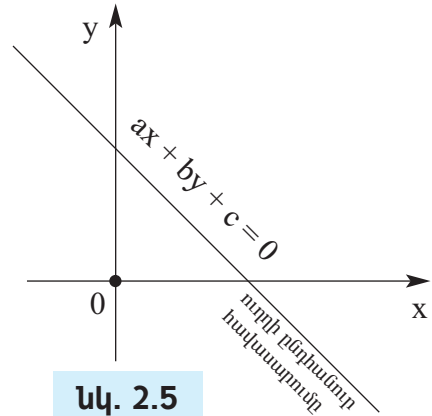


Նկ. 2.3

Եթե $b=0$, ապա ստանում ենք՝ $x = -\frac{c}{a}$, որը x -երի առանցքին ուղղահայաց և $B(-\frac{c}{a}, 0)$ կետով անցնող ուղղի հավասարումն է:



Նկ. 2.4



Նկ. 2.5

Առաջադրանքներ և խնդիրներ

19. $A(1,2)$, $B(3,4)$, $C(-4,3)$, $D(5,-1)$ կետերից որո՞նք են գտնվում $x^2+y^2=25$ հավասարումով տրված շրջանագծի վրա:
20. $x^2+y^2=169$ հավասարումով տրված շրջանագծի վրա գտե՛ք այն կետերը, որոնց արբւցիսը 5 է:
21. Տրված են $Q(-1,2)$ և $A(0,5)$ կետերը: Կազմե՛ք Q կենտրոնով և A կետով անցնող շրջանագծի հավասարումը:
22. Տրված են $A(2,0)$ և $B(-2,6)$ կետերը: Կազմե՛ք այն շրջանագծի հավասարումը, որի համար $[AB]$ -ն տրամագիծ է:
23. x -երի առանցքի վրա կենտրոն ունեցող շրջանագիծն անցնում է $A(1,4)$ կետով և նրա շառավիղը 5 է: Գտե՛ք այդ կենտրոնը:
24. Գտե՛ք $x^2+y^2-8x-8y+7=0$ շրջանագծի հատման կետերը x -երի առանցքի հետ:
25. Ապացուցե՛ք, որ $x^2+y^2+4x+1=0$ շրջանագիծը չի հատվում y -ների առանցքի հետ:
26. Գտե՛ք հավասարումը այն պատկերի, որը կազմված է բոլոր այն կետերից, որոնք հավասարահեռ են տրված $A(0,1)$ և $B(1,2)$ կետերից:
27. Գտե՛ք $5x+7y+8=0$ հավասարումով տրված ուղղի հատման կետերը կոորդինատների առանցքների հետ:
28. Կազմե՛ք $A(-1,1)$ և $B(1,0)$ կետերով անցնող ուղղի հավասարումը:
29. Կազմե՛ք $A(2,-3)$ կետով անցնող ուղղի հավասարումը, որը զուգահեռ է $y=2x-5$ հավասարումով տրված ուղղին:
30. Ինչի՞նչ է հավասար c գործակիցը $x+y+c=0$ ուղղի հավասարման մեջ, եթե այն անցնում է $A(1,2)$ կետով:

31. Ապացուցե՛ք, որ $x+2y=3$, $2x-y=1$ և $3x+y=4$ հավասարումներով տրված երեք ուղիղները հատվում են մեկ կետում:

§ 3. ԿՈՌՐԴԻՆԱՏՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՐԿՐԱՉԱՓԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԼՈՒՇԵԼԻՍ

Կորդինատների համակարգի ներմուծման միջոցով հնարավոր է դառնում երկրաչափական խնդիրները բերել հանրահաշվական խնդիրների և կիրառել հանրահաշվի մեթոդները: Դրա համար անհրաժեշտ է հարթության վրա ներմուծել կորդինատների ուղղանկյուն համակարգ և խնդրի պայմանը գրել կորդինատներով: Դրանից հետո մնում է կատարել հաշվարկներ: Սակայն շատ դեպքերում խնդիրը սրանով չի ավարտվում: Անհրաժեշտ է նաև ստացված հանրահաշվական արդյունքին տալ երկրաչափական մեկնաբանություն: Մասնավորապես, օրինակ «տեսնել» ստացված հավասարման մեջ շրջանագծի հավասարումը, եթե այն գրված չէ բնորոշ տեսքով: Նկատենք, որ երկրորդ աստիճանի հետևյալ հավասարումը

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

կամ շրջանագծի հավասարում է, կամ տալիս է կետ, կամ դատարկ բազմություն: Որպեսզի որոշենք, թե որ դեպքի հետ գործ ունենք, պետք է անջատել լրիվ քառակուսի ըստ x -ի և y -ի: Օրինակ՝ $x^2+y^2-4x+2y+1=0$ հավասարումը կձևափոխենք հետևյալ կերպ՝

$$(x^2-4x+4)+(y^2+2y+1)-5+1=0$$

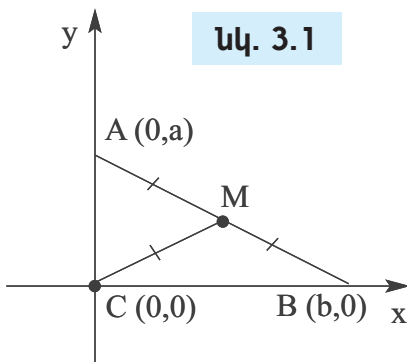
կամ

$$(x-2)^2+(y+1)^2=4:$$

Հետևաբար տրված հավասարումը $Q(2,-1)$ կենտրոնով և 2 շառավիղով շրջանագծի հավասարումն է:

Կորդինատների կիրառմամբ լուծենք մի քանի երկրաչափական խնդիրներ:

Խնդիր 1: Ապացուցել, որ ուղղանկյուն եռանկյան ներքնաձիգի միջնակետը հավասարահեռ է նրա բոլոր գագաթներից:



Նկ. 3.1

Ապացուցում: Դիցուք տրված է C ուղիղ անկյունով ABC ուղղանկյուն եռանկյունը: $[AB]$ ներքնաձիգի միջնակետը նշանակենք M -ով: Ներմուծենք կորդինատների ուղղանկյուն համակարգ՝ ուղղելով կորդինատների առանցքները եռանկյան էջերով, որպես սկզբնակետ ընտրելով C կետը (նկ. 3.1):

Եռանկյան գագաթներ կլինեն հետևյալ կետերը՝ $C(0,0)$, $A(0,a)$, $B(b,0)$, որտեղ

$a=|CA|$, $b=|CB|$: Որոշենք M կետի կոորդինատները: Ըստ (1.1) և (1.2) բանաձևերի՝ M միջնակետի կոորդինատներ են $\left(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}\right)$:

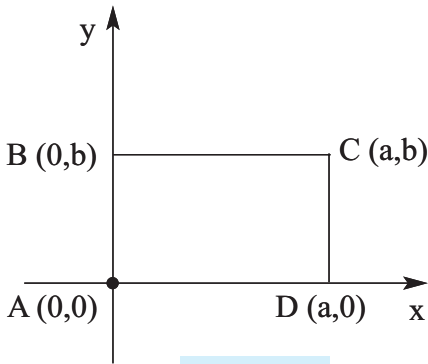
Գտնենք $[MC]$, $[MA]$ հատվածների երկարությունները՝ օգտվելով (1.3) բանաձևից: Ունենք՝

$$|MC| = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + a^2},$$

$$|MA| = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - a\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + a^2}:$$

Այսպիսով՝ $|MA|=|MB|=|MC|$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Խնդիր 2: Տրված է ABCD ուղղանկյունը: Ապացուցել, որ հարթության կամայական M կետի համար տեղի ունի $|AM|^2 + |CM|^2 = |BM|^2 + |DM|^2$ հավասարությունը:



սկ. 3.2

Ապացուցում: Ներմուծենք կոորդինատների ուղղանկյուն համակարգ: Որպես կոորդինատների սկզբնակետ ընտրենք ուղղանկյան A գագաթը, իսկ նրա առանցքներն ուղղենք ուղղանկյան կողմերով (նկ. 3.2): Ուղղանկյան գագաթները կլինեն հետևյալ կետերը՝ $A(0,0)$, $B(0,b)$, $C(a,b)$, $D(a,0)$, որտեղ $a=|AD|$, $b=|AB|$: Դիցուք $M(x,y)$ -ը հարթության կամայական կետ է: Որոշենք $|MA|$, $|MB|$, $|MC|$, $|MD|$ երկարությունները՝ օգտվելով (1.3) բանաձևից:

Ունենք՝

$$|MA| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$|MB| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-b)^2} = \sqrt{x^2 + (y-b)^2},$$

$$|MC| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2},$$

$$|MD| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-a)^2 + y^2},$$

որտեղից ստանում ենք՝

$$|AM|^2 + |CM|^2 = x^2 + y^2 + (x-a)^2 + (y-b)^2$$

$$|MB|^2 + |MD|^2 = x^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2 + y^2$$

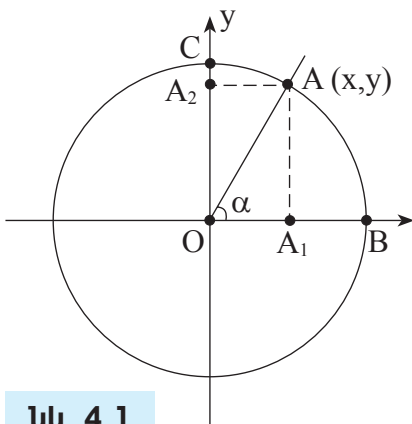
Այսպիսով՝ $|AM|^2 + |CM|^2 = |BM|^2 + |DM|^2$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Առաջադրանքներ և խնդիրներ

32. Ուղղանկյուն եռանկյան էջերի երկարությունները հավասար են 3 սմ և 4 սմ: Գտե՛ք այդ եռանկյան միջնագծերի երկարությունները:
33. Հավասարասրուն եռանկյան հիմքին տարված միջնագծի երկարությունը 8սմ է, իսկ հիմքի երկարությունը՝ 4 սմ: Գտե՛ք այդ եռանկյան մյուս երկու միջնագծերը:
34. ABC սուրանկյուն եռանկյան A գագաթից տարված [AD] բարձրությունը [BC] կողմը տրոհում է 10սմ և 4սմ երկարությամբ հատվածների: Գտե՛ք եռանկյան [AM] միջնագծի երկարությունը, եթե $|AD|=12$ սմ:
35. Ապացուցե՛ք, որ ուղղանկյան անկյունագծերը հավասար են:
36. Ապացուցե՛ք, որ հավասարասրուն սեղանի անկյունագծերը հավասար են:
37. Ապացուցե՛ք, որ գուգահեռագծի բոլոր կողմերի քառակուսիների գումարը հավասար է անկյունագծերի քառակուսիների գումարին:
38. Ապացուցե՛ք, որ եթե գուգահեռագծի անկյունագծերը հավասար են, ապա այդ գուգահեռագիծն ուղղանկյուն է:
39. Ի՞նչ պայմանի դեպքում կհատվեն a և b շառավիղներով շրջանագծերը, եթե կենտրոնների հեռավորությունը c է:
- 40*. Ապացուցե՛ք, որ եթե քառանկյան բոլոր կողմերի քառակուսիների գումարը հավասար է նրա անկյունագծերի քառակուսիների գումարին, ապա այն գուգահեռագիծ է:

§ 4. ԱՆԿՅԱՆ ՄԻՆՈՒՄԸ, ԿՈՍԻՆՈՍԸ ԵՎ ՏԱՆԳԵՆՍԸ

Նախորդ դասարանում ուղղանկյուն եռանկյան օգնությամբ մենք սահմանել ենք սուր անկյան սինուսը, կոսինուսը և տանգենսը:



սկ. 4.1

դեկարտյան x, y կոորդինատների համակարգի օգնությամբ սահմանենք այդ մեծությունները կամայական անկյան համար:

4.1. Անկյան սինուսը, կոսինուսը և տանգենսը: Հարթության վրա ներմուծենք դեկարտյան x, y կոորդինատների համակարգ: Դիտարկենք $O(0,0)$ կենտրոնով և 1 միավոր շառավիղով շրջանագիծը (նկ. 4.1), որի հատման կետերը x -ի և y -ի դրական կիսաառանցքների հետ նշանակենք B -ով և C -ով:

Դիտարկենք O գագաթով ճառագայթը, որը x -երի դրական կիսառանցքի հետ կազմում է α մեծությամբ անկյուն (նկ. 4.1):

Այդ ճառագայթի հատման կետը շրջանագծի հետ նշանակենք A -ով, որի կոորդինատներն են (x, y) -ը:

Նկատենք, որ 0° մեծությամբ անկյանը համապատասխանում է B կետը:

Եթե AOB անկյունը սուր է ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$), ապա OAA_1 ուղղանկյուն եռանկյունուց ստանում ենք.

$$\sin \alpha = \frac{|AA_1|}{|OA|}, \quad \cos \alpha = \frac{|OA_1|}{|OA|}, \quad \text{որտեղից հետևում է՝ } \sin \alpha = y, \quad \cos \alpha = x, \quad \text{քանի}$$

որ սուր անկյունների համար $|AA_1| = y$, $|OA_1| = x$ և $|AA_1| = 1$:

Այսպիսով, սուր անկյան կոսինուսը հավասար է α անկյանը համապատասխան A կետի x արբսցիսին, իսկ սինուսը՝ A կետի y օրդինատին:

Այս պնդումը հիմք ընդունենք սահմանելու կամայական α անկյան սինուսը և կոսինուսը:

Դիցուք տրված է կամայական անկյուն, որի մեծությունը նշանակենք α -ով ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$):

Սահմանում

α մեծությամբ անկյան սինուսը կոչվում է այդ անկյան համապատասխան A կետի y օրդինատը, իսկ α մեծությամբ անկյան կոսինուսը՝ A կետի x արբսցիսը (նկ. 4.1):

0° , 90° , 180° մեծությամբ անկյունների սինուսը և կոսինուսը գտնելու համար որոշենք համապատասխան A կետի կոորդինատները:

Քանի որ

1. 0° մեծությամբ անկյանը համապատասխան կետի կոորդինատներն են $(0, 1)$ -ը, հետևաբար՝

$$\cos 0^\circ = 1, \quad \sin 0^\circ = 0:$$

2. 90° մեծությամբ անկյանը համապատասխան կետի կոորդինատներն են $(0, 1)$ -ը, հետևաբար՝

$$\cos 90^\circ = 0, \quad \sin 90^\circ = 1:$$

3. 180° մեծությամբ անկյանը համապատասխան կետի կոորդինատներն են $(-1, 0)$ -ն, հետևաբար՝

$$\cos 180^\circ = -1, \quad \sin 180^\circ = 0:$$

Նկատենք, որ բուր անկյան դեպքում, այսինքն երբ ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$), α անկյանը համապատասխան A կետը գտնվում է II քառորդում, հետևաբար նրա արբսցիսը բացասական է, իսկ օրդինատը՝ դրական: Այսպիսով, α մեծությամբ բուր անկյան համար

$$\cos \alpha < 0, \quad \sin \alpha > 0:$$

Սահմանում

α մեծությամբ անկյան (որտեղ $\alpha \neq 90^\circ$) տանգենսը կոչվում է այդ անկյան $\sin$ -ի և $\cos$ -ի հարաբերությունը, այսինքն՝

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} :$$

Նկատենք, որ $\alpha = 90^\circ$ մեծությամբ անկյան տանգենսը որոշված չէ, քանի որ $\cos 90^\circ = 0$:

Սահմանում

α մեծությամբ անկյան (որտեղ $\alpha \neq 0^\circ$ և $\alpha \neq 180^\circ$) կոտանգենսը կոչվում է այդ անկյան $\cos$ -ի և $\sin$ -ի հարաբերությունը, այսինքն՝

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} :$$

Նկատենք, որ $\alpha = 0^\circ$ և $\alpha = 180^\circ$ մեծությամբ անկյունների կոտանգենսը որոշված չէ, քանի որ $\sin 0^\circ = 0$ և $\sin 180^\circ = 0$:

Տանգենսի և կոտանգենսի սահմանումներից հետևում է, որ α մեծությամբ անկյան համար, որտեղ $\alpha \neq 0^\circ$, $\alpha \neq 90^\circ$, $\alpha \neq 180^\circ$, ունենք

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \quad \text{կամ} \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1:$$

4.2. Եռանկյունաչափության հիմնական նույնությունը: Հիշենք, որ եռանկյունաչափությունը ուսումնասիրում է անկյան սինուսի, կոսինուսի, տանգենսի և կոտանգենսի հատկությունները:

Ձևակերպենք և ապացուցենք եռանկյունաչափության հիմնական նույնությունը:

Թեորեմ 4.1: Կամայական α մեծությամբ անկյան համար $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$:

Ապացուցում: Այս նույնությունը մենք արդեն ապացուցել ենք սուր անկյան համար: Այժմ ապացուցենք կամայական անկյան համար: Դիցուք տրված է կամայական անկյուն և α -ն նրա մեծությունն է ($0 \leq \alpha \leq 180^\circ$): Ինչպես գիտենք, այդ անկյանը համապատասխանում է մի A կետ, որը պատկանում է O կենտրոնով 1 շառավիղով շրջանագծին (նկ. 4.1) և ըստ սահմանման ($\cos \alpha$, $\sin \alpha$)-ն այդ կետի կոորդինատներն են: Օգտվելով երկու կետերի միջև հեռավորության բանաձևից և, որ O (0 , 0) և A ($\cos \alpha$, $\sin \alpha$) կետերի հեռավորությունը հավասար է 1, ունենք

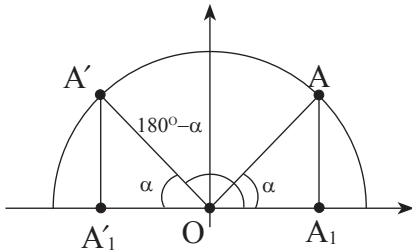
$$1 = |OA|^2 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha:$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Դիտողություն: Եթե եռանկյունաչափության հիմնական նույնության օգնությամբ անհրաժեշտ է հաշվել որևէ անկյան կոսինուսը այդ անկյան սինուսի միջոցով, ապա պետք է նաև հաշվի առնել, թե ինչպիսին է այդ անկյունը (բութ, թե սուր): Եթե անկյունը սուր է՝ $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, կամ $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 90^\circ$, ապա $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$, իսկ եթե անկյունը բութ է՝ $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ կամ $\alpha = 180^\circ$, ապա $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$:

4.3. Բերման բանաձևեր: Կան բանաձևեր, որոնց օգնությամբ բուրձանկյան եռանկյունաչափական արժեքները (սինուսը, կոսինուսը, տանգենսը) բերվում են սուր անկյան եռանկյունաչափական արժեքներին: Այդ բանաձևերը կոչվում են բերման բանաձևեր:

Թեորեմ 4.2: Կամայական α մեծությամբ անկյան համար
 $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$



Նկ. 4.2

Ապացուցում: Դիցուք տրված է α մեծությամբ անկյուն, և A -ն նրան համապատասխան կետն է: Դիտարկենք նաև $180^\circ - \alpha$ մեծությամբ անկյունը, որի համապատասխան կետը նշանակենք A' -ով: Նկար 4.2-ում պատկերված է այն դեպքը, երբ $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, մյուս դեպքում, երբ $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, A և A' կետերը պարզապես փոխում են իրենց տեղերը:

Ունենք $\triangle OAA_1 = \triangle OA'A_1$, ըստ ներքնաձիգի ($|OA| = |OA'|$) և սուր անկյուն $\angle OAA_1 = \angle OA'A_1 = \alpha$: Հետևաբար՝ $|AA_1| = |A'A_1|$, այսինքն $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$:

Ունենք նաև $|OA_1| = |OA'_1|$ և քանի որ A և A' կետերը գտնվում են տարբեր քառորդներում, ուրեմն $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$:

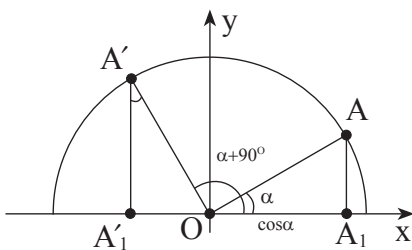
Թեորեմն ապացուցված է:

Հետևանք: Կամայական α անկյան համար, որի մեծությունը՝ $\alpha \neq 90^\circ$, տեղի ունի

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha:$$

$$\text{Իրոք, } \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ - \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha:$$

Թեորեմ 4.3: Կամայական α մեծությամբ սուր անկյան համար
 $\sin(\alpha + 90^\circ) = \cos \alpha$, $\cos(\alpha + 90^\circ) = -\sin \alpha$



Նկ. 4.3

Ապացուցում: Դիցուք տրված է α մեծությամբ սուր անկյուն, և A -ն նրան համապատասխան կետն է: Դիտարկենք նաև $\alpha + 90^\circ$ մեծությամբ անկյունը, որի համապատասխան կետը նշանակենք A' -ով (նկ. 4.3): Ունենք $\triangle OAA_1 = \triangle OA'A'_1$, ըստ ներքնաձիգի ($|OA| = |OA'| = 1$) և սուր անկյան $\angle OAA_1 = \angle OA'A'_1 = \alpha$:

Հետևաբար՝ $|OA_1| = |A'_1A'|$, այսինքն՝
 $\cos \alpha = \sin(\alpha + 90^\circ)$:

Ունենք նաև $|AA_1|=|OA_1|$, և քանի որ A և A' կետերը գտնվում են տարբեր քառորդներում, ուրեմն՝

$$\cos(\alpha+90^\circ) = -\sin\alpha:$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Դիտողություն: Նկատենք, որ ապացուցված նույնությունները ճիշտ են նաև $\alpha=0^\circ$ և $\alpha=90^\circ$ դեպքում:

Հետևանք: Կամայական α սուր անկյան համար $0^\circ<\alpha<90^\circ$ ունենք $\operatorname{tg}(\alpha+90^\circ) = -\operatorname{ctg}\alpha$ և $\operatorname{ctg}(\alpha+90^\circ) = -\operatorname{tg}\alpha$:

Առաջադրանքներ և խնդիրներ

41. Պատկանո՞ւմ են արդյոք հետևյալ կետերը O կենտրոնով և միավոր շառավիղով շրջանագծին.

ա) $A_1(0, 1)$, բ) $B_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, գ) $A_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, դ) $D\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$:

42. Ո՞ր մեծությամբ անկյանն է համապատասխանում $B\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ կետը:

43. Գտե՛ք միավոր կիսաշրջանագծի այն կետի կոորդինատները, որը համապատասխանում է 135° մեծության անկյանը:

44. Գտե՛ք 120° , 135° , 150° մեծության անկյունների սինուսը, կոսինուսը և տանգենսը:

45. Գտե՛ք անկյան մեծությունը, որի կոսինուսը $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ է:

46. Կառուցե՛ք α մեծությամբ անկյունը, եթե $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$:

47. Հավասար են արդյոք անկյունները, եթե նրանց կոսինուսները հավասար են:

48. Գտե՛ք անկյան մեծությունը, որի սինուսը $\frac{\sqrt{3}}{2}$ է: Քանի՞ լուծում ունի խնդիրը:

49. Կառուցե՛ք α մեծությամբ անկյունը, եթե $\sin\alpha = \frac{2}{3}$: Քանի՞ լուծում ունի խնդիրը:

50. Հավասար են արդյոք անկյունները, եթե նրանց սինուսները հավասար են:

51. Գտե՛ք $\sin\alpha$ -ն, եթե $\cos\alpha = -\frac{1}{5}$:

52. Գտե՛ք $\cos\alpha$ -ն, եթե $\sin\alpha = \frac{1}{5}$ և հայտնի է, որ α -ն բույժ անկյան մեծություն է:

53. Գտե՛ք անկյան սինուսը և կոսինուսը, եթե նրա տանգենսը $\frac{1}{3}$ է:

54. Հավասար են արդյոք անկյունները, եթե նրանց տանգենսները հավասար են:

55. Դասավորե՛ք աճման կարգով $\cos 120^\circ$, $\cos 90^\circ$, $\cos 180^\circ$, $\cos 30^\circ$:

56. Դասավորե՛ք աճման կարգով $\sin 20^\circ$, $\sin 40^\circ$, $\sin 170^\circ$:

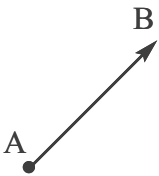
5.1. Վեկտորի հասկացությունը: Որոշ ֆիզիկական մեծություններ, օրինակ՝ ուժը, արագությունը, բնութագրվում են ոչ միայն թվային արժեքներով, այլ նաև ուղղությամբ: Իսկապես, տվյալ պահին մարմնի շարժումը նկարագրելու համար բավական չէ ասել, որ նա շարժվում է 50 կմ/ժ արագությամբ, այլ պետք է նշել, թե որ ուղղությամբ է շարժվում, այսինքն՝ արագության ուղղությունը: Հետևաբար, հարմար է այդ ֆիզիկական մեծությունները նշանակել ուղղորդված հատվածներով, որն ունի ոչ միայն դիտողական նշանակություն: Զիչ անց կտեսնենք, որ այդ նկարագրության դեպքում ֆիզիկական մեծությունների հետ կատարվող գործողությունները բերվում են պարզ երկրաչափական կառուցումների:

Դիտարկենք որևէ հատված, որի վրա ցուցանշված է, թե նրա ծայրակետերից որն է սկիզբը (սկզբնակետ) և որը՝ վերջը (վերջնակետ), այսինքն՝ հատվածի վրա տրված է ուղղություն (մի ծայրից մյուսը):

Սահմանում

Ուղղորդված հատվածը կոչվում է **վեկտոր**:

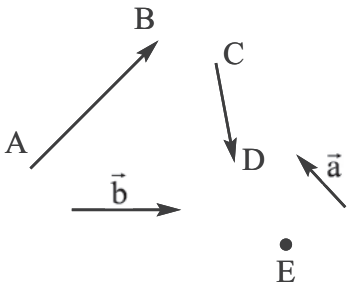
Վեկտորները պատկերում են հատվածներով, որի վրա սլաքով ցույց են տալիս ուղղությունը (նկ.5.1):



Նկ. 5.1

Վեկտորը նշանակում են հատվածի ծայրակետերի տառանշաններով՝ վերևում դնելով սլաք, օրինակ՝ նկ. 5.1-ում պատկերված է $\overrightarrow{AB}$ վեկտորը, ընդ որում առաջին տառը նշանակում է վեկտորի սկիզբը, իսկ երկրորդը՝ վերջը: Մասնավորապես, $\overrightarrow{AB}$ -ն և $\overrightarrow{BA}$ -ն երկու տարբեր վեկտորներ են: Հարմարության համար վեկտորները կնշանակենք նաև լատինական փոքրատառերով՝ վերևում դնելով սլաք, օրինակ՝ $\vec{a}$, $\vec{b}$ և այլն:

Վեկտորը կոչվում է **զրոյական**, եթե նրա սկիզբը և վերջը համընկնում են: Զրոյական վեկտորը կնշանակենք ինչպես $\vec{EE}$ -ով, որտեղ E կետը զրոյական վեկտորի սկիզբը և վերջն է, այնպես էլ $\vec{0}$ -ով: Նկ. 5.2-ում պատկերված են $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ ոչ զրոյական վեկտորները և $\vec{EE}$ զրոյական վեկտորը:



Նկ. 5.2

Ոչ զրոյական $\overrightarrow{AB}$ վեկտորի երկարություն կամ մոդուլ կոչվում է $|\overrightarrow{AB}|$ հատվածի երկարությունը: $\overrightarrow{AB}$ վեկտորի մոդուլը կնշանակենք $|\overrightarrow{AB}|$ -ով, նմանապես $\vec{a}$ վեկտորի մոդուլը կնշանակենք $|\vec{a}|$ -ով: Զրոյական վեկտորի երկարությունը համարվում է հավա-

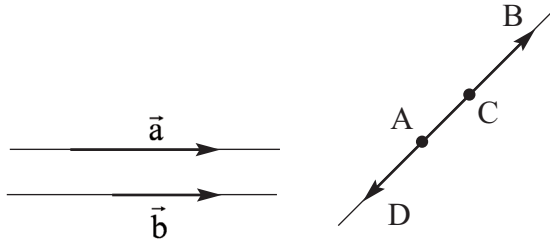
սար 0-ի, այսինքն՝ $|\vec{0}|=0$: Վեկտորը կոչվում է **միավոր**, եթե նրա երկարությունը հավասար է 1-ի:

5.2. Վեկտորների հավասարությունը: Վեկտորների հավասարությունը սահմանելուց առաջ ներմուծենք համագիծ վեկտորների հասկացությունը:

Սահմանում

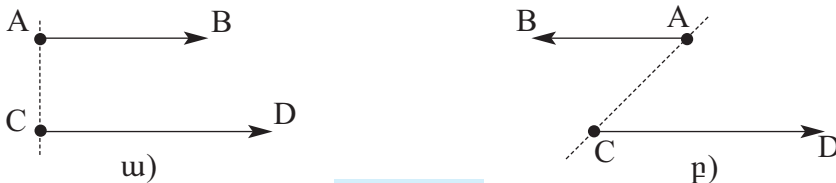
Երկու ոչ զրոյական $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{CD}$ վեկտորներ համագիծ են, եթե նրանք գտնվում են կամ միևնույն ուղղի, կամ զուգահեռ ուղիղների վրա: Համարենք, որ զրոյական վեկտորը համագիծ է ցանկացած վեկտորի:

Նկ. 5.3-ում $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{CD}$, $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են: Համագիծ վեկտորները լինում են համուղղված կամ հակուղղված: Միևնույն ուղղի վրա գտնվող երկու $\vec{a}$ և $\vec{b}$ ոչ զրոյական վեկտորները կարող են ուղղված լինել կամ միանման, կամ հակադիր: Առաջին դեպքում $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները կոչվում են համուղղված, իսկ երկրորդ դեպքում՝ հակուղղված:



Նկ. 5.3

Զուգահեռ ուղիղների վրա գտնվող $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{CD}$ ոչ զրոյական վեկտորները կոչվում են համուղղված, եթե նրանց B և D վերջնակետերը գտնվում են $\overline{AC}$ ուղղի միևնույն կողմում (նկ. 5.4ա), հակառակ դեպքում (նկ. 5.4բ) $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{CD}$ վեկտորները կոչվում են հակուղղված:

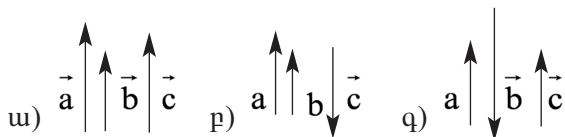


Նկ. 5.4

Եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համուղղված են, ապա կգրենք $\vec{a} \uparrow \vec{b}$, իսկ եթե նրանք հակուղղված են, ապա՝ $\vec{a} \downarrow \vec{b}$: Պայմանավորվենք, որ յուրաքանչյուր զրոյական վեկտոր համուղղված է ցանկացած վեկտորի:

Համագիծ վեկտորները օժտված են հետևյալ հատկություններով: Դիցուք տրված են երեք ոչ զրոյական $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ վեկտորները:

- Եթե
1. $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ և $\vec{b} \uparrow \uparrow \vec{c}$, ապա $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{c}$ (նկ. 5.5 ա)
 2. $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}$ և $\vec{b} \uparrow \downarrow \vec{c}$, ապա $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{c}$ (նկ. 5.5 բ))
 3. $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$ և $\vec{b} \uparrow \downarrow \vec{c}$, ապա $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{c}$ (նկ. 5.5 գ))



նկ. 5.5

Սահմանում

Երկու վեկտորներ **հավասար են**, եթե նրանք համուղված են և ունեն հավասար երկարություն:

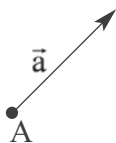
Եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները հավասար են, ապա կգրենք՝ $\vec{a} = \vec{b}$:

5.3 Վեկտորի տեղադրությունը տրված կետից: Եթե A կետը $\vec{a}$ վեկտորի սկզբնակետն է, ապա կասենք, որ $\vec{a}$ վեկտորը տեղադրված է A կետից (նկ. 5.6):

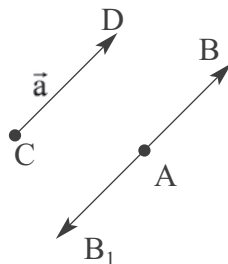
Թեորեմ 5.1:

Ցանկացած կետից կարելի է տեղադրել տրված վեկտորին հավասար վեկտոր, ընդ որում միայն մեկը:

Ապացուցում: Դիցուք տրված են $\vec{a}$ վեկտորը և A կետը: Եթե $\vec{a}$ -ն զրոյական վեկտոր է, ապա AA -ն որոնելին է: Ենթադրենք, որ $\vec{a}$ -ն զրոյական վեկտոր չէ, իսկ C -ն և D -ն նրա սկիզբն ու վերջն են: A կետով տանենք CD ուղղին զուգահեռ ուղիղ (նկ. 5.7):



նկ. 5.6



նկ. 5.7

Այդ ուղղի վրա տեղադրենք $|CD|$ երկարության $[AB]$ և $[AB_1]$ հատվածները: AB և AB_1 վեկտորներից ընտրենք այն, որը համուղված է $\vec{a}$ վեկտորին: Հենց այդ վեկտորն էլ կլինի որոնելին: Կառուցումից հետևում է, որ այդ վեկտորը միակն է: Թեորեմն ապացուցված է:

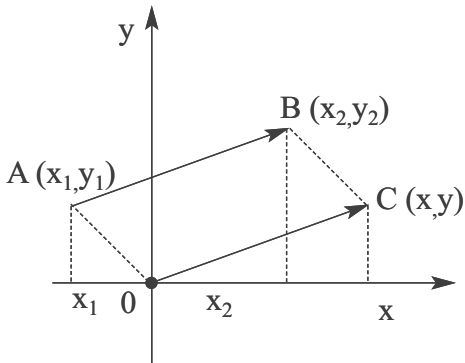
5.4. Վեկտորի կոորդինատները: Դիցուք կոորդինատների xy հարթության մեջ տրված է $A(x_1, y_1)$ և $B(x_2, y_2)$ ծայրակետերով $\vec{AB}$ վեկտորը:

Սահմանում

$x_2 - x_1$ և $y_2 - y_1$ թվերը կանվանենք $\vec{AB}$ վեկտորի կոորդինատներ:

Վեկտորի կոորդինատները կգրենք նրա տառային նշանակման կողքին, տվյալ դեպքում $\vec{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, կամ ուղղակի $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$: Զրոյական վեկտորի կոորդինատները հավասար են զրոյի:

Հիմնավորենք տրված սահմանումը: Կորորդինատների O սկզբնակետից տեղադրենք AB վեկտորին հավասար $\vec{a}$ վեկտորը (նկ. 5.8), որի վերջնակետը նշանակենք $C(x,y)$ տառով: Կորորդինատների սկզբնակետը



Նկ. 5.8

$$\frac{x_2 + 0}{2} = \frac{x_1 + x}{2} \text{ և } \frac{y_2 + 0}{2} = \frac{y_1 + y}{2}, \text{ որտեղից}$$

$x = x_2 - x_1$ և $y = y_2 - y_1$: Ուրեմն՝ $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ թվազույգը որոշում է $\vec{AB}$ -ին հավասար $\vec{a}$ վեկտորը, հետևաբար՝ նաև $\vec{AB}$ վեկտորը:

Թեորեմ 5.2:

Հավասար վեկտորներն ունեն համապատասխան հավասար կորորդինատներ: Եվ հակադարձը՝ եթե երկու վեկտորների համապատասխան կորորդինատները հավասար են, ապա այդ վեկտորները հավասար են:

Ապացուցում: Դիցուք $\vec{a}$ -ն և $\vec{b}$ -ն հավասար վեկտորներ են: $\vec{a}$ վեկտորի կորորդինատները հավասար են կորորդինատների $O(0,0)$ սկզբնակետից տեղադրված $\vec{a}$ -ին հավասար $\vec{OA}$ վեկտորի A ծայրակետի համապատասխան կորորդինատներին: Նմանապես, $\vec{b}$ -ի կորորդինատները հավասար են $O(0,0)$ սկզբնակետից տեղադրված $\vec{b}$ -ին հավասար $\vec{OB}$ վեկտորի ծայրակետի համապատասխան կորորդինատներին: Սակայն $\vec{a} = \vec{b}$ -ից հետևում է, որ $\vec{OA} = \vec{OB}$: Հետևաբար A և B կետերը համընկնում են: Ուրեմն՝ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների համապատասխան կորորդինատները հավասար են:

Հակադարձ պնդման ապացուցումը: Դիցուք $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների համապատասխան կորորդինատները հավասար են: Նշանակենք այդ կորորդինատները (x,y) -ով: $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները հավասար են $O(0,0)$ սկզբնակետից տեղադրված և $A(x,y)$ վերջնակետը ունեցող $\vec{OA}$ վեկտորին: Հետևաբար $\vec{a} = \vec{b}$: Թեորեմն ապացուցված է:

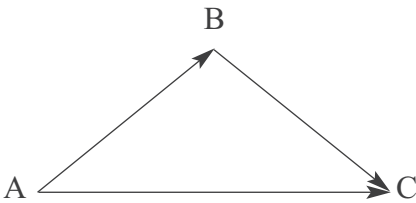
57. Հարթության վրա նշեք երեք կետեր: Գծեք բոլոր ոչ զրոյական վեկտորները, որոնց սկիզբն ու վերջը համընկնում են այդ կետերից որևէ երկուսին:
58. Գծեք երկու վեկտորներ, որոնք՝ ա) ունեն հավասար երկարություն և համագիծ չեն, բ) ունեն հավասար երկարություն և համուղղված են, գ) ունեն հավասար երկարություն և հակուղղված են:
59. ABCD ուղղանկյան մեջ $|AB|=3$ սմ, $|BC|=4$ սմ, իսկ M–ը $[AB]$ կողմի միջնակետն է: Գտեք $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AC}$ վեկտորների երկարությունները:
60. O–ն ABCD զուգահեռագծի անկյունագծերի հատման կետն է: Հավասար են արդյոք հետևյալ վեկտորները՝ ա) $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{DC}$, բ) $\overrightarrow{BC}$ և $\overrightarrow{DA}$, գ) $\overrightarrow{AO}$ և $\overrightarrow{OC}$, դ) $\overrightarrow{AO}$ և $\overrightarrow{OD}$:
61. A ուղիղ անկյունով և $[AD]$ հիմքով ABCD ուղղանկյուն սեղանի համար $|AD|=12$ սմ, $|AB|=5$ սմ, $\angle D=45^\circ$: Գտեք $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}$ և $\overrightarrow{AC}$ վեկտորների երկարությունները:
62. Ապացուցեք, որ եթե $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{CD}$ վեկտորները հավասար են, ապա $[AD]$ և $[BC]$ հատվածների միջնակետերը համընկնում են: Եվ հակադարձը, եթե $[AD]$ և $[BC]$ հատվածների միջնակետերը համընկնում են, ապա $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$:
63. Ինչպիսի՞ն է ABCD քառանկյունը, եթե $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ և $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$:
64. Գտեք $A(-2,5)$ և $B(3,-1)$ ծայրակետերն ունեցող $\overrightarrow{AB}$ վեկտորի կոորդինատները:
65. Գտեք B կետի կոորդինատները, եթե $A(1,2)$ սկզբնակետ ունեցող $\overrightarrow{AB}$ վեկտորը հավասար է $\vec{a}(-2,1)$ վեկտորին:
66. xy հարթության վրա տրված է $A(1,1)$, $B(-1,1)$, $C(-1,-1)$ գագաթներով եռանկյունը: Գտեք $[CM]$ միջնագծի երկարությունը:
67. Գտեք $\vec{a}(2,1)$ վեկտորին հակուղղված և նույն երկարությունն ունեցող վեկտորի կոորդինատները:
68. Գտեք $\vec{b}$ վեկտորի կոորդինատները, եթե այն համուղղված է $\vec{a}(-1,2)$ վեկտորին և $|\vec{b}|=2|\vec{a}|$:
69. Գտեք $\vec{b}$ վեկտորի կոորդինատները, եթե այն հակուղղված է $\vec{a}(0,-3)$ վեկտորին և $|\vec{b}|=2|\vec{a}|$:
70. Գտեք $\vec{b}$ վեկտորի կոորդինատները, եթե այն հակուղղված է $\vec{a}(2,0)$ վեկտորին և $|\vec{b}|=4|\vec{a}|$:

§ 6. ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐՈՒՄԸ ԵՎ ՀԱՆՈՒՄԸ: ՎԵԿՏՈՐԻ ԲԱԶՄԱԴԱՏԿՈՒՄԸ ԹՎՈՎ

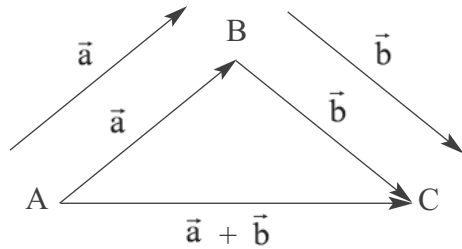
6.1. Վեկտորների գումարումը: Դիտարկենք մի օրինակ: Դիցուք նյութական կետը տեղափոխվում է նախ՝ A կետից B կետը, իսկ այնուհետև՝ B կետից C կետը: Առաջին տեղափոխությունը կարող ենք նկարագրել $\overrightarrow{AB}$ վեկտորով, իսկ երկրորդը՝ $\overrightarrow{BC}$ վեկտորով: Այս երկու տեղափոխությունների արդյունքում նյութական կետը A կետից հայտնվեց C կետում (նկ. 6.1): Ուրեմն՝ վերջնական տեղափոխությունը կարելի է նկարագրել $\overrightarrow{AC}$ վեկտորով: Բնական կլինի $\overrightarrow{AC}$ վեկտորը համարել $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{BC}$ վեկտորների գումար՝ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$: Այս օրինակը հուշում է վեկտորների գումարի հետևյալ սահմանումը:

Սահմանում

Դիցուք տրված են երկու $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներ: Վերցնենք որևէ A կետ և այդ կետից տեղադրենք $\vec{a}$ վեկտորին հավասար $\overrightarrow{AB}$ վեկտորը: Այնուհետև՝ B կետից տեղադրենք $\vec{b}$ վեկտորին հավասար $\overrightarrow{BC}$ վեկտորը: $\overrightarrow{AC}$ վեկտորը կոչվում է $\vec{a}$ և $\vec{b}$ **վեկտորների գումար** (նկ. 6.2):

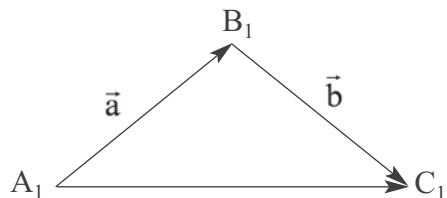
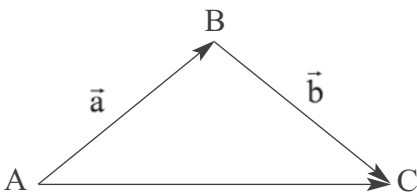


նկ. 6.1



նկ. 6.2

Վեկտորների գումարման այս օրենքը անվանում են **եռանկյան օրենք**: Ապացուցենք, որ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները գումարելիս, եթե A կետի փոխարեն վերցնենք մեկ այլ A_1 կետ և այդ կետից տեղադրենք $\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{a}$ վեկտորը, այնուհետև B_1 կետից տեղադրենք $\overrightarrow{B_1C_1} = \vec{b}$ վեկտորը, ապա $\overrightarrow{AC}$ վեկտորը փոխարինվում է իրեն հավասար $\overrightarrow{A_1C_1}$ վեկտորով: Այլ խոսքերով՝ ապացուցենք, որ եթե $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ և $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1}$, ապա $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$ (նկ. 6.3):



նկ. 6.3

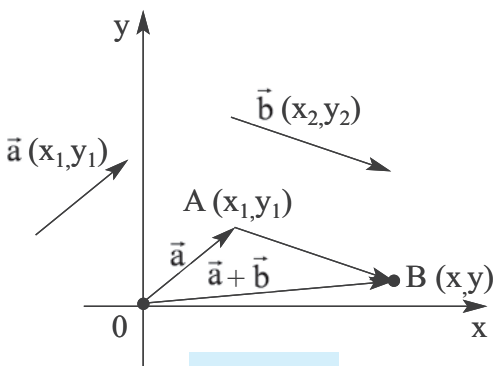
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ հավասարությունից հետևում է, որ ABB_1A_1 -ը զուգահեռագիծ է (ենթադրենք, որ A, B, A_1 կետերը չեն գտնվում միևնույն ուղղի վրա): Հետևաբար՝ $\overrightarrow{A_1A} = \overrightarrow{B_1B}$: Նման ձևով՝ $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1C_1}$ հավասարությունից հետևում է, որ BCC_1B_1 -ը զուգահեռագիծ է (ենթադրենք, որ B, C, B_1 կետերը չեն գտնվում միևնույն ուղղի վրա): Հետևաբար՝ $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1}$: Ստացված հավասարություններից ստանում ենք, որ $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{CC_1}$: Ուստի՝ ACC_1A_1 -ը զուգահեռագիծ է և, ուրեմն, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}$ (ենթադրում ենք, որ A, C, A_1 կետերը չեն գտնվում միևնույն ուղղի վրա): Ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Մնացած դեպքերի համար պնդման ապացույցը դժվար չէ:

$\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների գումարը նշանակենք $\vec{a} + \vec{b}$ -ով: Սահմանումից հետևում է, որ $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ և $\vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$, որտեղ $\vec{a}$ -ն կամայական վեկտոր է:

Թեորեմ 6.1: Երկու վեկտորների գումարի յուրաքանչյուր կորդինատը հավասար է այդ վեկտորների համապատասխան կորդինատների գումարին:

Ապացուցում: Դիցուք տրված են $\vec{a}(x_1, y_1)$ և $\vec{b}(x_2, y_2)$ վեկտորները: Ապացուցենք, որ $\vec{a} + \vec{b}$ վեկտորի կորդինատներն են $x_1 + x_2$ և $y_1 + y_2$ թվերը:



Նկ. 6.4

Կորդինատների $O(0,0)$ սկզբնակետից տեղադրենք $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ վեկտորը, որի A ծայրակետի կորդինատները կլինեն (x_1, y_1) -ը: Այնուհետև A կետից տեղադրենք $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ վեկտորը, որի B ծայրակետի կորդինատները նշանակենք (x, y) -ով (նկ. 6.4): Ըստ սահմանման՝ $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OB}$: Այժմ գտնենք B կետի կորդինատները: $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ հավասարությունից հետևում է, որ $x - x_1 = x_2$ և $y - y_1 = y_2$: Այսինքն՝ B կետի կորդինատներն են՝ $x = x_1 + x_2$ և

$y = y_1 + y_2$: Հետևաբար՝ $\vec{a} + \vec{b}$ վեկտորի կորդինատներն են՝ $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$: Թեորեմն ապացուցված է:

6.2. Վեկտորների գումարման հատկությունները: Զուգահեռագծի կանոն: Վեկտորների գումարն օժտված է հետևյալ հատկություններով: Դիցուք տրված են երեք $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ վեկտորներ:

Թեորեմ 6.2: Ցանկացած $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ վեկտորների համար տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները.

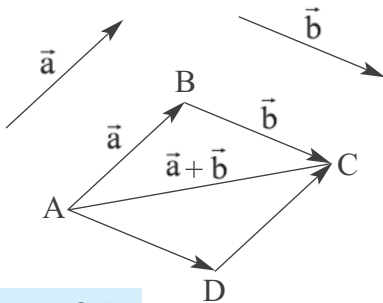
1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (տեղափոխական օրենք)
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (զուգորդական օրենք):

Ապացուցում: Ապացուցման համար բավական է համեմատել հավասարությունների աջ և ձախ մասերում գրված վեկտորների համապատասխան կոորդինատները (տե՛ս Թեորեմ 5.2): Հավասարությունների աջ և ձախ մասերում գրված վեկտորների համապատասխան կոորդինատները հավասար են, քանի որ թվերի գումարումն օժտված է տեղափոխական և գուգորդական օրենքներով: Օրինակ՝ ապացուցենք 1 դեպք: Դիցուք տրված են $\vec{a}(x_1, y_1)$ և $\vec{b}(x_2, y_2)$ վեկտորները: $\vec{a}+\vec{b}$ վեկտորի կոորդինատներն են՝ (x_1+x_2, y_1+y_2) , իսկ $\vec{b}+\vec{a}$ վեկտորի կոորդինատներն են՝ (x_2+x_1, y_2+y_1) : Քանի որ $x_1+x_2=x_2+x_1$ և $y_1+y_2=y_2+y_1$, հետևաբար՝ $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$:

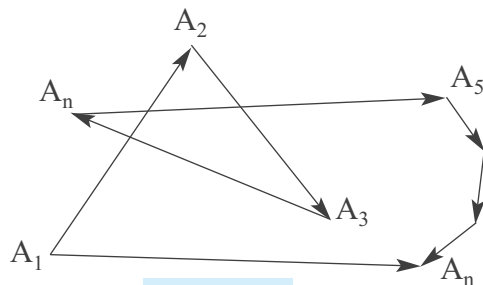
Նման ձևով ապացուցվում է նաև գուգորդական օրենքը: Թեորեմն ապացուցված է:

Տարագիծ (ոչ համագիծ) վեկտորների գումարը որոշում են նաև, այսպես կոչվող, **գուգահեռագծի կանոնով**: Ըստ այդ կանոնի՝ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ տարագիծ վեկտորները գումարելու համար հարկավոր է որևէ A կետից տեղադրել $\overline{AB}=\vec{a}$ և $\overline{AD}=\vec{b}$ վեկտորները և կառուցել $ABCD$ գուգահեռագիծը (նկ. 6.5): Այդ դեպքում $\overline{AC}$ վեկտորը կլինի հավասար $\vec{a}+\vec{b}$ վեկտորին:

Մի քանի վեկտորների գումարումը կատարվում է նրանց հաջորդական գումարման ճանապարհով: Վեկտորների գումարման օրենքներից հետևում է, որ մի քանի վեկտորների գումարը կախված չէ այն բանից, թե ինչ հերթականությամբ ենք դրանք գումարում: Մի քանի վեկտորների գումարը կառուցվում է ըստ **բազմանկյան կանոնի**, որը ձևակերպվում է հետևյալ կերպ: Եթե $A_1, A_2, \dots, A_n$ -ը հարթության կամայական կետեր են (նկ. 6.6), ապա $\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \dots + \overline{A_{n-1}A_n} = \overline{A_1A_n}$:



նկ. 6.5



նկ. 6.6

6.3. Վեկտորների հանումը

Սահմանում

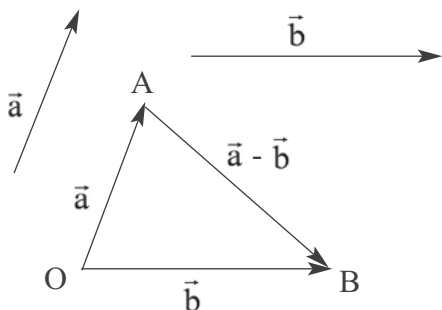
$\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների **տարբերություն** կոչվում է այն $\vec{c}$ վեկտորը, որ $\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$:

$\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների տարբերությունը նշանակենք $\vec{a}-\vec{b}$ -ով: Միշտ որոշված է արդյոք $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների տարբերությունը: Այս հարցին պատասխանենք՝ պարզապես կառուցելով $\vec{a}-\vec{b}$ -ն:

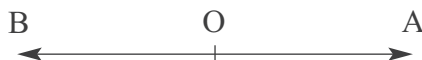
Խնդիր: Տրված են $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները: Կառուցել $\vec{a}-\vec{b}$ վեկտորը: Հարթության որևէ O կետից տեղադրենք $\overline{OA}=\vec{a}$ և $\overline{OB}=\vec{b}$ վեկտորները (նկ. 6.7):

Ըստ եռանկյան կանոնի՝ $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$, կամ $\vec{b} + \overrightarrow{BA} = \vec{a}$: Ըստ վեկտորների տարբերության սահմանման՝ դա նշանակում է, որ $\overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$, այսինքն՝ $\overrightarrow{BA}$ վեկտորը որոնելին է:

Դիցուք տրված է $\vec{a}$ ոչ զրոյական վեկտորը: $\vec{a}$ վեկտորի **հակադիր վեկտոր** կոչվում է այն վեկտորը, որն ունի $|\vec{a}|$ երկարություն և հակուղղված է $\vec{a}$ վեկտորին: Նկ. 6.8-ում $\overrightarrow{OA}$ և $\overrightarrow{OB}$ վեկտորները, որտեղ $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}|$, հակադիր են $\vec{a}$ վեկտորին, հակադիր վեկտորը նշանակենք $-\vec{a}$ -ով: Զրոյական վեկտորին հակադիր, է համարվում զրոյական վեկտորը: Պարզ է, որ $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$:



Նկ. 6.7



Նկ. 6.8

Թեորեմ 6.3: Երկու վեկտորների տարբերության յուրաքանչյուր կոորդինատ հավասար է այդ վեկտորների համապատասխան կոորդինատների տարբերությանը:

Ապացուցում: Դիցուք տրված են $\vec{a}(x_1, y_1)$ և $\vec{b}(x_2, y_2)$ վեկտորները: $\vec{a} - \vec{b}$ վեկտորի կոորդինատները նշանակենք (x, y) -ով: Ըստ սահմանման՝ $\vec{a} - \vec{b}$ -ն այն վեկտորն է, որ $(\vec{a} - \vec{b}) + \vec{b} = \vec{a}$: Թեորեմ 6.1-ից ունենք՝ $x_2 + x = x_1$ և $y_2 + y = y_1$: Հետևաբար՝ $\vec{a} - \vec{b}$ վեկտորի կոորդինատներն են՝ $x = x_1 - x_2$ և $y = y_1 - y_2$: Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 6.3-ից կատարենք հետևյալ հետևությունը: Դիցուք տրված է $\vec{a}(x, y)$ վեկտորը: Քանի որ $-\vec{a} = \vec{0}(0, 0) - \vec{a}(x, y)$, հետևաբար՝ $-\vec{a}$ վեկտորի կոորդինատներն են $(-x, -y)$ -ը:

Թեորեմ 6.4: Ցանկացած $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների համար տեղի ունի $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ հավասարությունը:

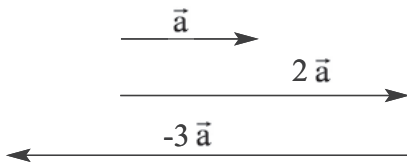
Ապացուցում: Ապացուցման համար համեմատենք հավասարության աջ և ձախ մասերում գրված վեկտորների կոորդինատները: Դիցուք տրված են $\vec{a}(x_1, y_1)$ և $\vec{b}(x_2, y_2)$ վեկտորները:

Թեորեմ 6.3-ից հետևում է, որ $\vec{a} - \vec{b}$ -ի կոորդինատներն են $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ -ը, իսկ $\vec{a} + (-\vec{b})$ -ի կոորդինատներն են $(x_1 + (-x_2), y_1 + (-y_2))$: Քանի որ $x_1 - x_2 = x_1 + (-x_2)$ և $y_1 - y_2 = y_1 + (-y_2)$, հետևաբար՝ $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$: Թեորեմն ապացուցված է:

6.5 Վեկտորի բազմապատկումը թվով

Մահմանում

Ոչ զրոյական $\vec{a}$ վեկտորի և k թվի արտադրյալ կոչվում է այն $\vec{b}$ վեկտորը, որի երկարությունը հավասար է $|k||\vec{a}|$: Ընդ որում՝ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համուղղված են, եթե $k \geq 0$, և հակուղղված են, եթե $k < 0$:



Նկ. 6.9

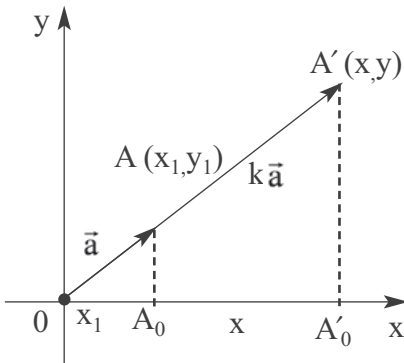
Զրոյական վեկտորի և կամայական թվի արտադրյալը համարվում է զրոյական վեկտոր:

$\vec{a}$ վեկտորի և k թվի արտադրյալը նշանակենք $k\vec{a}$ -ով: Նկ. 6.9-ում պատկերված են $\vec{a}$, $2\vec{a}$, $-3\vec{a}$ վեկտորները:

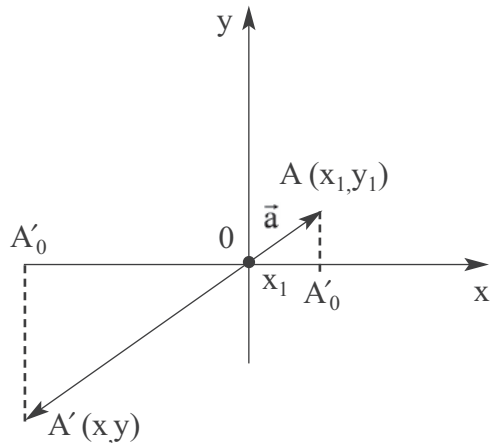
Թեորեմ 6.5:

Վեկտորի և թվի արտադրյալի յուրաքանչյուր կոորդինատը հավասար է վեկտորի համապատասխան կոորդինատի և այդ թվի արտադրյալին:

Ապացուցում: Դիցուք տրված են $\vec{a}(x_1, y_1)$ վեկտորը և k թիվը: $k\vec{a}$ վեկտորի կոորդինատները նշանակենք (x, y) -ով: Կոորդինատների $O(0, 0)$ սկզբնակետից տեղադրենք $\vec{a}$ և $k\vec{a}$ վեկտորները: Նկ. 6.10 ա)-ում պատկերված է այն դեպքը, երբ $k \geq 0$, իսկ նկ. 6.10 բ)-ում՝ երբ $k < 0$:



Նկ. 6.10



Երկու դեպքում էլ OAA_0 և $OA'A'_0$ եռանկյունների նմանությունից ունենք՝

$$\frac{|k\vec{a}|}{|\vec{a}|} = |k| = \frac{|x|}{|x_1|}:$$

Սակայն երբ $k \geq 0$, ապա x -ը և x_1 -ը ունեն նույն նշանը, հետևաբար՝ $x = kx_1$, երբ $k < 0$, ապա x -ը և x_1 -ը ունեն տարբեր նշաններ, այսինքն այս դեպքում ևս՝ $x = kx_1$: Նման ձևով ստանում ենք նաև $y = ky_1$: Թեորեմն ապացուցված է:

Վեկտորի և թվի արտադրյալը օժտված է հետևյալ հատկություններով:

Թեորեմ 6.6: **Ցանկացած k, m թվերի և $\vec{a}, \vec{b}$ վեկտորների համար տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները.**

1. $(km)\vec{a}=k(m\vec{a})$ (զուգորդական օրենք)
2. $(k+m)\vec{a}=k\vec{a}+m\vec{a}$ (առաջին բաշխական օրենք)
3. $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ (երկրորդ բաշխական օրենք):

Ապացուցում: Ինչպես և Թեորեմ 6.2-ի ապացուցման ժամանակ, բավական է համեմատել հավասարությունների աջ և ձախ մասերում գրված վեկտորների համապատասխան կոորդինատները: Հավասարությունների աջ և ձախ մասերում գրված վեկտորների համապատասխան կոորդինատները հավասար են, քանի որ թվերի գումարումը և բազմապատկումը օժտված են զուգորդական և բաշխական օրենքներով: Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմներ 6.2-ը, 6.4-ը և 6.5-ը թույլ են տալիս վեկտորների գումար, տարբերություն և վեկտորի ու թվի արտադրյալ պարունակող արտահայտությունները ձևափոխել ըստ այդ կանոնների: Օրինակ՝

$$5(\vec{a} - \vec{b}) + (\vec{c} - 2\vec{a}) - 4(\vec{b} + \vec{a} - 3\vec{c}) = 5\vec{a} - 5\vec{b} + \vec{c} - 2\vec{a} - 4\vec{b} - 4\vec{a} + 12\vec{c} = -\vec{a} - 9\vec{b} + 13\vec{c}:$$

Առաջադրանքներ և խնդիրներ

71. Ապացուցե՛ք, որ ցանկացած երկու՝ a և b վեկտորների համար տեղի ունի $|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}|+|\vec{b}|$ անհավասարությունը:
72. Ապացուցե՛ք, որ եթե A -ն, B -ն, C -ն և D -ն կամայական կետեր են, ապա՝ ա) $\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CA}=\vec{0}$, բ) $\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}+\vec{DA}=\vec{0}$:
73. Օ-ն $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ կանոնավոր վեցանկյան կենտրոնն է: Ապացուցե՛ք, որ $\vec{OA_1}+\vec{OA_2}+\vec{OA_3}+\vec{OA_4}+\vec{OA_5}+\vec{OA_6}=\vec{0}$:
74. Տրված է $ABCD$ զուգահեռագիծը: Ապացուցե՛ք, որ $\vec{MA}+\vec{MC}=\vec{MB}+\vec{MD}$, որտեղ M -ը հարթության կամայական կետ է:
75. M -ը ABC եռանկյան միջնագծերի հատման կետն է: Ապացուցե՛ք, որ $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}=\vec{0}$:
76. Գծե՛ք երկու $\vec{a}$ և $\vec{b}$ տարագիծ վեկտորներ և կառուցե՛ք $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{a}$, $\vec{b}+\vec{a}$ վեկտորներ:
77. Տրված է $ABCD$ զուգահեռագիծը: $\vec{AC}$ վեկտորն արտահայտե՛ք հետևյալ վեկտորների միջոցով. ա) $\vec{CB}$ և $\vec{CD}$, բ) $\vec{AB}$ և $\vec{DA}$:
78. Պարզեցրե՛ք հետևյալ արտահայտությունները.
ա) $(\vec{AB}+\vec{BC}-\vec{MC})+(\vec{MD}-\vec{KD})$, բ) $(\vec{CB}+\vec{MC}+\vec{BD})-(\vec{MK}+\vec{KD})$:
79. ABC հավասարակողմ եռանկյան կողմի երկարությունը a է: Գտե՛ք ա) $|\vec{BC}+\vec{CA}|$, բ) $|\vec{AB}+\vec{CB}|$, գ) $|\vec{AB}+\vec{AC}|$:
80. ABC ուղղանկյուն եռանկյան B գագաթի անկյունն ուղիղ է և $|\vec{AB}|=4$, $|\vec{BC}|=5$: Գտե՛ք և համեմատե՛ք հետևյալ թվերը ա) $|\vec{AB}|+|\vec{BC}|$ և $|\vec{AB}+\vec{BC}|$, բ) $|\vec{AB}|-|\vec{BC}|$ և $|\vec{AB}-\vec{BC}|$, գ) $|\vec{BA}|+|\vec{BC}|$ և $|\vec{BA}-\vec{BC}|$:

81. Գծե՛ք երկու՝ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ տարագիծ վեկտորներ և կառուցե՛ք. $\vec{a} + 2\vec{b}$, $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$, $3\vec{a} - \vec{b}$, $-\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$ վեկտորները:
82. C_1 -ը և B_1 -ը ABC եռանկյան $[AB]$ և $[AC]$ կողմերի միջնակետերն են: Արտահայտե՛ք $\vec{C_1B_1}$ վեկտորը $\vec{AB}$ և $\vec{AC}$ վեկտորների միջոցով:
83. $[BB_1]$ -ը ABC եռանկյան միջնագիծն է: $\vec{B_1C}$, $\vec{BB_1}$, $\vec{BA}$, $\vec{BC}$ վեկտորներն արտահայտե՛ք $\vec{AB_1}$ և $\vec{AB}$ վեկտորների միջոցով:
84. $ABCD$ զուգահեռագծի $[BC]$ կողմի վրա նշված է M կետն այնպես, որ $|BM|:|MC|=3$: $\vec{AM}$ և $\vec{MD}$ վեկտորներն արտահայտե՛ք $\vec{a}=\vec{AD}$ և $\vec{b}=\vec{AB}$ վեկտորների միջոցով:
85. Տրված է $ABCD$ զուգահեռագիծը: Գտե՛ք $\vec{AC} + \vec{BD} - 2\vec{AD}$ վեկտորը:
86. M -ը և N -ը $ABCD$ քառանկյան $[AC]$ և $[BD]$ անկյունագծերի միջնակետերն են: Ապացուցե՛ք, որ $\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{CB})$:
87. ABC հավասարակողմ եռանկյան $[AC]$ կողմի երկարությունը a է: Գտե՛ք ա) $|3\vec{AB} + 3\vec{BC}|$, բ) $|-2\vec{BC} - 2\vec{BA}|$:
88. ABC ուղղանկյուն եռանկյան B գագաթի անկյունն ուղիղ է և $|AB|=5$, $|BC|=3$: Գտե՛ք $|3\vec{AB} + 4\vec{BC}|$:
89. xy հարթության վրա տրված են $A(-1,3)$, $B(3,4)$ և $C(2,-3)$ կետերը: Գտե՛ք հետևյալ վեկտորների կոորդինատները: $\vec{AB} - \vec{BC}$, $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{AC}$, $\vec{AB} + \vec{BC} + 3\vec{CA}$:
90. Տրված են $\vec{a}(3,-2)$ և $\vec{b}(-1,-1)$ վեկտորները: Գտե՛ք հետևյալ վեկտորների կոորդինատները. $2\vec{a}$, $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{a}$, $2\vec{a} - 3\vec{b}$, $\frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$, $\frac{1}{|\vec{a} + \vec{b}|} \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})$

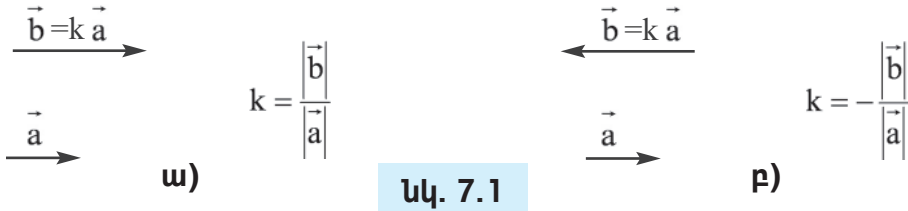
§ 7. ՏԱՐԱԳԻԾ ՎԵԿՏՈՐՆԵՐ: ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՐԿՐԱՉԱԾԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԼՈՒՄԵԼԻՍ

7.1. Վեկտորի վերածումը ըստ երկու տարագիծ վեկտորների: Դիցուք տրված են $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները: Եթե $\vec{c}$ վեկտորը արտահայտվում է $\vec{c} = k\vec{a} + m\vec{b}$ տեսքով, որտեղ m -ը և k -ն որևէ թվեր են, ապա կասենք, որ $\vec{c}$ վեկտորը վերածվում է ըստ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների, իսկ k և m թվերը կանվանենք վերածման գործակիցներ: Իսկ ե՛րբ է հնարավոր $\vec{c}$ վեկտորը վերածել ըստ տրված $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների: Այս հարցին պատասխանելուց առաջ ապացուցենք հետևյալ լեմմը:

Լեմմ 7.1: Եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են, և $|\vec{a}| \neq 0$, ապա գոյություն ունի k թիվ այնպիսին, որ $\vec{b} = k\vec{a}$:

Ապացուցում: Հնարավոր է երկու դեպք: 1) Նկ. 7.1ա) $\vec{a} \uparrow \vec{b}$: Այս դեպքում k -ով նշանակենք $\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ հարաբերությունը: Դիտարկենք k և $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները: Նրանք համողղված են, քանի որ $k > 0$, և ունեն հավասար երկարություններ, քանի որ $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = |\vec{b}|$:

Ուրեմն՝ $k\vec{a}=\vec{b}$:



Նկ. 7.1

2) Նկ. 7.1բ) $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$: Այս դեպքում k -ով նշանակենք $-\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ հարաբերությունը: Դիտարկենք $k\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները: Այդ վեկտորները համուղղված են, քանի որ $k\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{a}$ ($k < 0$) և $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$, ինչպես նաև ունեն հավասար երկարություններ, քանի որ $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}| = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = |\vec{b}|$:

Ուրեմն՝ $k\vec{a}=\vec{b}$: Լեմման ապացուցված է:

Լեմմա 7.1-ից և Թեորեմ 6.5-ից հետևում է, որ զրոյից տարբեր համագիծ վեկտորների համապատասխան կոորդինատները համեմատական են: Եվ հակադարձը, եթե երկու վեկտորների համապատասխան կոորդինատները համեմատական են, ապա վեկտորները համագիծ են: Իսկապես, եթե $\vec{a}(x_1, y_1)$ և $\vec{b}(x_2, y_2)$ վեկտորները համագիծ են, և $|\vec{a}| \neq 0$, ապա՝ ըստ Լեմմա 7.1-ի $\vec{b}(x_2, y_2) = k\vec{a}(x_1, y_1)$ կամ $x_2 = kx_1$ և $y_2 = ky_1$:

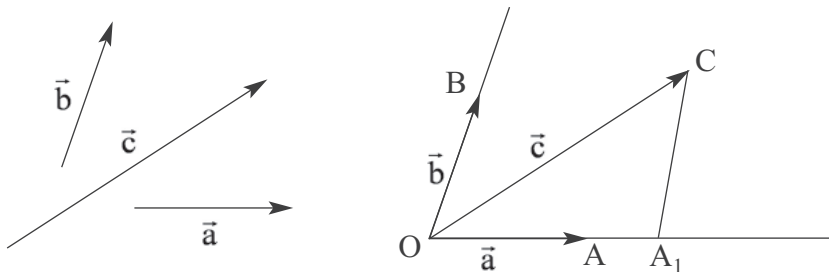
Օգտվելով այս Լեմմից՝ ապացուցենք հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 7.1:

Դիցուք՝ $\vec{a}$ -ն և $\vec{b}$ -ն երկու տարագիծ վեկտորներ են: Ցանկացած $\vec{c}$ վեկտոր կարելի է վերածել ըստ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների, ընդ որում վերածման գործակիցները միակն են:

Ապացուցում: Հնարավոր է երկու դեպք: 1) $\vec{c}$ վեկտորը համագիծ է $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներից որևէ մեկին, օրինակ՝ $\vec{a}$ վեկտորին: Այս դեպքում, ըստ Լեմմա 7.1-ի ունենք, որ $\vec{c} = k\vec{a}$: Հետևաբար՝ $\vec{c} = k\vec{a} + 0\vec{b}$, այսինքն՝ $\vec{c}$ վեկտորը վերածվում է ըստ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների:

2) $\vec{c}$ վեկտորը համագիծ չէ ինչպես $\vec{a}$, այնպես էլ $\vec{b}$ վեկտորին: Որևէ O կետից տեղադրենք $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$ և $\vec{OC}=\vec{c}$ վեկտորները: C կետով տանենք OB ուղղին զուգահեռ ուղիղ, որի հատման կետը OA ուղղի հետ նշանակենք A_1 -ով (Նկ. 7.2):



Նկ. 7.2

Ըստ եռանկյան կանոնի՝ $\vec{c} = \vec{OA_1} + \vec{A_1C}$: Սակայն $\vec{OA_1}$ և $\vec{A_1C}$ վեկտորները համագիծ են համապատասխանաբար $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներին: Հետևաբար՝ գոյություն ունեն այնպիսի k և m թվեր, որ $\vec{OA_1} = k\vec{a}$ և $\vec{A_1C} = m\vec{b}$: Հետևաբար՝ $\vec{c} = k\vec{a} + m\vec{b}$, այսինքն $\vec{c}$ վեկտորը վերածվում է ըստ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների:

Այժմ ապացուցենք, որ վերածման գործակիցները միակն են: Ենթադրենք, թե կա մեկ այլ վերածում, այսինքն գոյություն ունի k_1, m_1 թվերի մեկ ուրիշ զույգ, որ $\vec{c} = k_1\vec{a} + m_1\vec{b}$: Հետևաբար՝

$$k\vec{a} + m\vec{b} = k_1\vec{a} + m_1\vec{b},$$

որտեղից

$$(k - k_1)\vec{a} = (m_1 - m)\vec{b}:$$

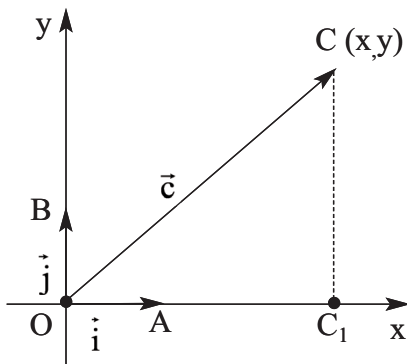
Սակայն վերջին հավասարությունը հնարավոր է միայն այն դեպքում, երբ $k = k_1$ և $m = m_1$: Իսկապես, եթե օրինակ՝ $k \neq k_1$, ապա կստանանք՝

$$\vec{a} = \frac{m_1 - m}{k - k_1} \cdot \vec{b},$$

որը կնշանակեր, որ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են:

Դա կհակասեր թեորեմի պայմանին: Այսպիսով՝ $k = k_1$ և $m = m_1$: Թեորեմն ապացուցված է:

7.2. Կորորդինատային վեկտորներ: Հարթության վրա կորորդինատների xy համակարգում դիտարկենք երկու միավոր վեկտորներ $\vec{i}(1,0)$ և $\vec{j}(0,1)$: Կորորդինատների $O(0,0)$ սկզբնա-



սկ. 7.3

կետից տեղադրենք $\vec{OA} = \vec{i}$ և $\vec{OB} = \vec{j}$ վեկտորները: Պարզ է, որ $\vec{i} = \vec{OA}$ վեկտորի ուղղությունը համընկնում է x -երի առանցքի ուղղությանը, քանի որ նրա $A(1,0)$ ծայրակետը պատկանում է x -երի դրական կիսաառանցքին, իսկ $\vec{OB} = \vec{j}$ վեկտորի ուղղությունը համընկնում է y -ների առանցքի ուղղությանը, քանի որ $B(0,1)$ ծայրակետը պատկանում է y -ների դրական կիսաառանցքին (նկ. 7.3): Ունենք նաև, որ $|\vec{OA}| = 1$ և $|\vec{OB}| = 1$:

Սահմանում

$\vec{i}$ և $\vec{j}$ վեկտորները անվանենք **կորորդինատային վեկտորներ**:

$\vec{i}$ և $\vec{j}$ վեկտորները տարագիծ են, ուրեմն՝ ըստ Թեորեմ 7.1-ի, յուրաքանչյուր $\vec{c}$ վեկտոր կարելի է վերածել ըստ կորորդինատային վեկտորների: Գիտենք նաև, որ վերածման գործակիցները միակն են:

Դիցուք տրված $\vec{c}(x,y)$ վեկտորը վերածենք ըստ $\vec{i}$ և $\vec{j}$ վեկտորների (նկ. 7.3): C կետից տանենք y -ների առանցքին զուգահեռ ուղիղ, որի հատման կետը x -երի առանցքի հետ նշանակենք C_1 -ով: Ունենք՝

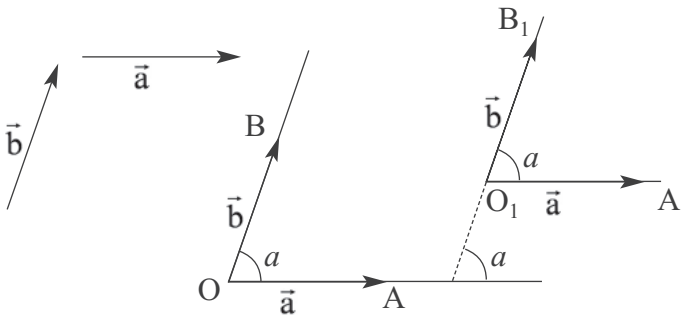
$$\vec{c}(x,y) = \vec{OC} = \vec{OC_1} + \vec{C_1C}:$$

Եթե $x \geq 0$, ապա $\overrightarrow{OC_1}$ -ը համուղված է $\vec{i}$ -ին և $\overrightarrow{OC_1} = k\vec{i}$, որտեղ $k = \frac{|\overrightarrow{OC_1}|}{|\overrightarrow{OA}|} = x$, այսինքն՝ $\overrightarrow{OC_1} = x\vec{i}$ (Լեմմա 7.1): Եթե $x < 0$, ապա $\overrightarrow{OC_1}$ հակուղված է $\vec{i}$ -ին և $\overrightarrow{OC_1} = k\vec{i}$, որտեղ $k = \frac{|\overrightarrow{OC_1}|}{|\overrightarrow{OA}|} = x$, այսինքն՝ $\overrightarrow{OC_1} = x\vec{i}$:

Այսպիսով, երկու դեպքում էլ ստացանք, որ $\overrightarrow{OC_1} = x\vec{i}$: Նման ձևով կստանանք նաև, որ $\overrightarrow{CC_1} = y\vec{j}$: Հետևաբար՝ $\vec{c}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j}$:

Այսպիսով ստացանք՝ $\vec{c}(x,y)$ վեկտորի կոորդինատները հավասար են $\vec{c}$ -ի ըստ $\vec{i}$ և $\vec{j}$ վեկտորների վերածման համապատասխան գործակիցներին:

7.3. Վեկտորների կազմած անկյունը: Դիցուք տրված են $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները: Որևէ O կետից տեղադրենք $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ և $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ վեկտորները: Եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համուղված չեն, ապա OA և OB ճառագայթները կազմում են $\angle AOB$ անկյունը (նկ. 7.4), որի աստիճանային մեծությունը նշանակենք α -ով:



նկ. 7.4

Սահմանում

α -ն կոչվում է $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյուն:

Նկատենք, որ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյունը կախված չէ O կետի ընտրությունից: Դրանում հեշտությամբ կարող եք համոզվել՝ օգտագործելով նկ. 7.4-ը:

Եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համուղված են, ապա կհամարենք, որ նրանց կազմած անկյունը 0° է:

$\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյունը նշանակենք $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ -ով: Երկու վեկտորներ կոչվում են ուղղահայաց, եթե նրանց կազմած անկյունը 90° է: $\vec{a}$ և $\vec{b}$ ուղղահայաց վեկտորների համար կգրենք՝ $\vec{a} \perp \vec{b}$:

7.4. Վեկտորների սկալյար արտադրյալը: Այսպիսով մենք ծանոթացանք երկու գործողության, որոնք կապված են վեկտորների հետ: Դրանք են՝ վեկտորների գումարումը և վեկտորների բազմապատկումը թվով: Նկատենք, որ այս գործողությունների արդյունքը դարձյալ վեկտոր է: Այժմ ծանոթանանք երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալին:

Սահմանում

Երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալ կոչվում է այդ վեկտորների երկարությունների և նրանցով կազմված անկյան կոսինուսի արտադրյալը:

Այսպիսով, երկու՝ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը, որը կնշանակենք $\vec{a} \cdot \vec{b}$, հավասար է.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}),$$

որտեղ $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ -ն այդ վեկտորների կազմած անկյունն է:

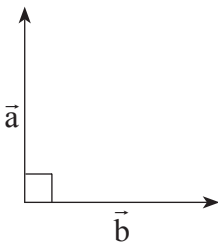
Նկատենք, որ, ի տարբերություն նախորդ գործողությունների, երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալը թիվ է, այստեղից էլ նրա անվանումը (մաթեմատիկայում սկալյար անվանում են մեծությունը, որը արտահայտվում է թվով):

Երկու ուղղահայաց վեկտորների սկալյար արտադրյալը 0 է:

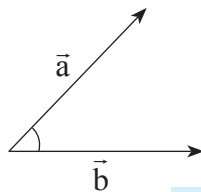
Իսկապես, եթե $\vec{a}$ -ն և $\vec{b}$ -ն ուղղահայաց են, այսինքն $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$, ապա $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ և հետևաբար $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$:

Հակադարձ պնդումը նույնպես ճիշտ է, այսինքն՝ **եթե երկու ոչ զրոյական $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը 0 է, ապա նրանք ուղղահայաց են:**

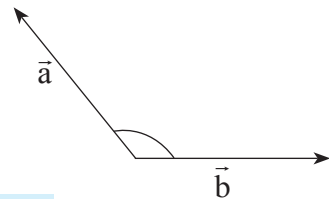
Իսկապես, սկալյար արտադրյալի սահմանումից ստանում ենք՝ $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ կամ $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0$, որտեղից հետևում է, որ $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ (նկ. 7.5ա):



ա)
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$



բ)
 $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$



գ)
 $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$

Նկ. 7.5

Նկատենք նաև, որ եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյունը սուր է (նկ. 7.5բ), ապա նրանց սկալյար արտադրյալը դրական թիվ է, քանի որ $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) > 0$: Իսկ եթե $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյունը բութ է (նկ. 7.5գ), ապա նրանց սկալյար արտադրյալը բացասական թիվ է, քանի որ $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) < 0$:

Համարենք, որ զրոյական վեկտորի սկալյար արտադրյալը կամայական վեկտորի հետ հավասար է 0:

Կամայական վեկտորի սկալյար արտադրյալն ինքն իր հետ հավասար է այդ վեկտորի երկարության քառակուսուն: Իսկապես.

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2 \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2:$$

Կորորդինատային վեկտորների համար ունենք՝

$\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}|^2 = 1$, $\vec{j} \cdot \vec{j} = |\vec{j}|^2 = 1$, իսկ $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$, քանի որ կորորդինատային վեկտորները ուղղահայաց են:

Վեկտորների սկալյար արտադրյալը օժտված է մի շարք հատկություններով:

Թեորեմ 7.2:

Կամայական $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ վեկտորների համար տեղի ունեն հետևյալ հավասարությունները.

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
2. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$:

Այս թեորեմի ապացույցը կտրվի հաջորդ դասարանի դասընթացում:

Տեղի ունի ևս մեկ կարևոր պնդում, որը թույլ է տալիս գտնել երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալը այդ վեկտորների կորորդինատների միջոցով:

Թեորեմ 7.3:

Դեկարտյան կորորդինատային համակարգում տրված երկու՝ $\vec{a} (x_1, y_1)$ և $\vec{b} (x_2, y_2)$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը հավասար է. $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$:

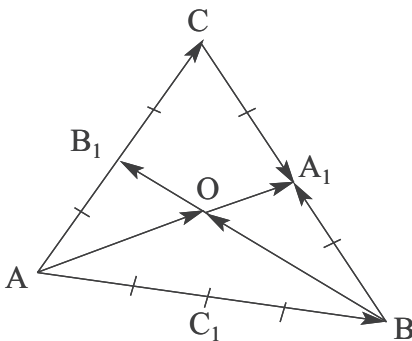
Ապացուցում: $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները վերածելով ըստ $\vec{i}$ և $\vec{j}$ կորորդինատային վեկտորների՝ կստանանք. $\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}$ և $\vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}$:

Թեորեմ 7.2-ից հետևում է.

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}) \cdot (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}) = x_1 x_2 \cdot \vec{i} \cdot \vec{i} + x_1 y_2 \cdot \vec{i} \cdot \vec{j} + \\ &+ y_1 x_2 \cdot \vec{j} \cdot \vec{i} + y_1 y_2 \cdot \vec{j} \cdot \vec{j} = x_1 x_2 + y_1 y_2, \text{ քանի որ } \vec{i} \cdot \vec{i} = 1, \vec{j} \cdot \vec{j} = 1, \\ &\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0: \end{aligned}$$

Թեորեմն ապացուցված է:

7.5. Վեկտորների կիրառությունը խնդիրներ լուծելիս: Երկրաչափական խնդիրներ լուծելու և թեորեմներ ապացուցելու համար հարմար է օգտվել վեկտորներից: Բերենք վեկտորների օգնությամբ խնդիրների լուծման օրինակներ:



սկ. 7.6

Խնդիր 1: Ապացուցել, որ եռանկյան միջնագծերը հատվում են մի կետում և այդ կետով բաժանվում են 2:1 հարաբերությամբ, հաշված համապատասխան գագաթներից:

Լուծում: Դիցուք A_1 -ը ABC եռանկյան [BC] կողմի միջնակետն է, իսկ B_1 -ը՝ [AC] կողմի: [AA₁] և [BB₁] միջնագծերի հատման կետը նշանակենք O-ով (նկ. 7.6): Վերածենք $\vec{OA}$ վեկտորը ըստ երկու տարագիծ $\vec{AB}$ և $\vec{AC}$ վեկտորների: $\vec{AO}$ և

$\overrightarrow{AA_1}$ վեկտորները համուղղված են, հետևաբար գոյություն ունի $k>0$ թիվ այնպիսին, որ

$$\overrightarrow{AO} = k \cdot \overrightarrow{AA_1} = k \cdot \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2} = \frac{k}{2} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{k}{2} \cdot \overrightarrow{AC}, \quad (1)$$

քանի որ $\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AA_1}$, ուստի՝ $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$:

$\overrightarrow{AO}$ վեկտորը վերածենք ըստ $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{AC}$ վեկտորների մեկ այլ եղանակով: $\overrightarrow{BO}$ և $\overrightarrow{BB_1}$ վեկտորները նույնպես համուղղված են, ուրեմն գոյություն ունի $p>0$ թիվ այնպիսին, որ $\overrightarrow{BO} = p\overrightarrow{BB_1}$: Եռանկյան կանոնից ունենք՝

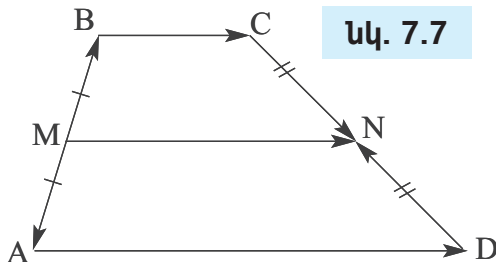
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AO} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AB} + p\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AB} + \frac{p}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{p}{2}(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = (1-p)\overrightarrow{AB} + \frac{p}{2}\overrightarrow{AC}: \end{aligned} \quad (2)$$

Համաձայն Թեորեմ 7.1-ի $\overrightarrow{AO}$ -ն կարելի է միակ ձևով վերածել ըստ $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{AC}$ վեկտորների: Հետևաբար (1)-ից և (2)-ից կստանանք, որ համապատասխան գործակիցները հավասար են: Այսպիսով ունենք՝

$$\begin{cases} \frac{k}{2} = 1-p \\ \frac{k}{2} = \frac{p}{2}, \end{cases}$$

որտեղից $\frac{k}{2} = 1-k$ կամ $k = \frac{2}{3}$ Այսպիսով, $[BB_1]$ միջնագիծը բաժանում է $[AA_1]$ միջնագիծը 2:1 հարաբերությամբ՝ հաշված A գագաթից: Նման ձևով $[CC_1]$ միջնագիծը նույնպես կտրոհի $[AA_1]$ միջնագիծը 2:1 հարաբերությամբ՝ հաշված A գագաթից: Ուրեմն՝ եռանկյան երեք միջնագծերը հատվում են մի կետում: $[AA_1]$ միջնագծի փոխարեն վերցնելով $[BB_1]$ և $[CC_1]$ միջնագծերը և կատարելով նույն դատողությունները, կստանանք, որ հատման կետով եռանկյան միջնագծերը բաժանվում են 2:1 հարաբերությամբ՝ հաշված համապատասխան գագաթներից: Ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Խնդիր 2: (Սեղանի միջին գծի հատկությունը): Ապացուցել, որ սեղանի միջին գիծը զուգահեռ է նրա հիմքերին և հավասար է դրանց կիսագումարին:



Լուծում: Դիցուք M-ը և N-ը ABCD սեղանի համապատասխանաբար $[AB]$ և $[CD]$ սրունքների միջնակետերն են (սկ. 7.7): Ըստ բազմանկյան կանոնի՝

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}, \\ \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}: \end{aligned}$$

Գումարելով այս հավասարությունները՝ ստանում ենք $2\overrightarrow{MN}=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})+(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{CN})$: Սակայն $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ և $\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}$, քանի որ M-ը և N-ը համապատասխանաբար $[AB]$ -ի և $[CD]$ -ի միջնակետերն են: Հետևաբար՝ $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$: Քանի որ $\overrightarrow{AD}$ և $\overrightarrow{BC}$ վեկտորները համուղղված են, ապա $\overrightarrow{AD}$ և $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$ վեկտորները ևս համուղղված են: Հետևաբար՝ $\overrightarrow{MN}$ և $\overrightarrow{AD}$ վեկտորները համուղղված են, այսինքն՝ $MN\parallel AD$: Մյուս կողմից, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$ վեկտորի երկարությունը հավասար է $|AD|+|BC|$: Հետևաբար՝ $2|MN|=|AD|+|BC|$, ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

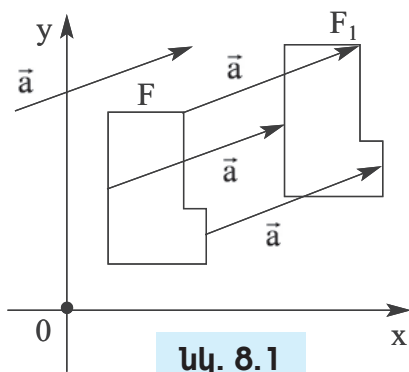
Առաջադրանքներ և խնդիրներ

91. Ապացուցե՛ք, որ $\vec{a}(1,2)$ և $\vec{b}(0,5;1)$ վեկտորները համուղղված են, իսկ $\vec{c}(-1,2)$ և $\vec{d}(0,5;-1)$ վեկտորները՝ հակուղղված:
92. Տրված է $\vec{a}(1,2)$ վեկտորը: Գտե՛ք $\vec{b}$ վեկտորի կոորդինատները, որը երկու անգամ երկար է $\vec{a}$ վեկտորից և նրան՝ ω համուղղված է, ρ հակուղղված է:
93. Հայտնի է, որ $\vec{a}(1,-1)$ և $\vec{b}(-2,m)$ վեկտորները համագիծ են: Գտե՛ք m -ը:
94. n -ի ո՞ր արժեքի դեպքում են համուղղված $\vec{a}(n,1)$ և $\vec{b}(4,n)$ վեկտորները:
95. Տրված է $\vec{a}(-6,8)$ վեկտորը: Գտե՛ք x -ը, եթե $|x\vec{a}|=5$:
96. Գտե՛ք միավոր վեկտորը, որը համուղղված լինի $\vec{a}(4,-3)$ վեկտորին:
97. Տրված են $\vec{a}(3,2)$ և $\vec{b}(1,-1)$ վեկտորները: Գտե՛ք հետևյալ վեկտորների երկարությունները՝ ա) $-3\vec{a}+5\vec{b}$, բ) $\vec{a}-\frac{\vec{b}}{2}$, գ) $5\vec{a}-2\vec{b}$:
98. Վերածե՛ք $\vec{c}(-1,-2)$ վեկտորը ըստ $\vec{a}(1,0)$ և $\vec{b}(1,1)$ վեկտորների:
99. Վերածե՛ք $\vec{c}(-3,4)$ վեկտորը ըստ $\vec{i}$ և $\vec{j}$ վեկտորների, որտեղ $\vec{i}$ -ն և $\vec{j}$ -ն կոորդինատային վեկտորներ են:
100. $\vec{i}(1,0)$ -ն և $\vec{j}(0,1)$ -ն կոորդինատային վեկտորներ են: Գտե՛ք $-2\vec{i}+3\vec{j}$ վեկտորի կոորդինատները:
101. Գտե՛ք $\vec{a}(1,2)$ և $\vec{b}(-2,1)$ վեկտորների կազմած անկյունը:
102. Տրված են $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները: Գտե՛ք $|\vec{a}-\vec{b}|$ -ն, եթե $|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$, իսկ նրանցով կազմած անկյան մեծությունը 60° է:
103. Տրված են երկու ուղղահայաց $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներ: Գտե՛ք $|\vec{a}+\vec{b}|$ -ն, եթե $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$:
104. $[AA_1]$ -ը, $[BB_1]$ -ը և $[CC_1]$ -ը ABC եռանկյան միջնագծերն են: $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ և $\overrightarrow{CC_1}$ վեկտորներն արտահայտե՛ք $\overrightarrow{AC}$ և $\overrightarrow{AB}$ վեկտորների միջոցով:
105. Օ կետը ABC եռանկյան $[AM]$ միջնագծի միջնակետն է: Արտահայտե՛ք $\overrightarrow{AO}$ վեկտորը $\overrightarrow{AC}$ և $\overrightarrow{AB}$ վեկտորների միջոցով:

106. Ապացուցե՛ք, որ սեղանի անկյունագծերի միջնակետերը միացնող հատվածը զուգահեռ է սեղանի հիմքերին և հավասար է դրանց կիսատարբերությանը:
107. Գտե՛ք $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը, եթե $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $\angle(\vec{a}, \vec{b})=60^\circ$:
108. Գտե՛ք $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյունը, եթե $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -6$:
109. Գտե՛ք $\vec{a} \cdot \vec{a}$, եթե $|\vec{a}|=2$:
110. $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյունը 90° է: Գտե՛ք $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$, եթե $|\vec{a}|=3$:
111. $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները հակառակ ուղղությամբ են: Գտե՛ք նրանց սկալյար արտադրյալը, եթե $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=3$:
112. $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյունը 120° է: Գտե՛ք $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$, եթե $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$:
113. Գտե՛ք $\vec{a}(-1,2)$ և $\vec{b}(3,4)$ վեկտորների սկալյար արտադրյալը:
114. Տրված են $\vec{a}(1,0)$ և $\vec{b}(1,1)$ վեկտորները: Գտե՛ք λ -ն այնպես, որ $\vec{a}+\lambda\vec{b}$ վեկտորներն ուղղահայաց լինեն $\vec{a}$ վեկտորին:
115. Գտե՛ք $\vec{a}(1,2)$ և $\vec{b}(1, \frac{1}{2})$ վեկտորների կազմած անկյունը:
116. $\vec{a}+\vec{b}$ և $\vec{a}-\vec{b}$ վեկտորներն ուղղահայաց են: Ապացուցե՛ք, որ $|\vec{a}|=|\vec{b}|$:

§ 8. ՎԵՂԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԴՎԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

8.1. Զուգահեռ տեղափոխություն: Հարթության վրա ներմուծենք դեկարտյան x, y կոորդինատների համակարգը: Դիցուք հարթության



սկ. 8.1

վրա տրված են F պատկերը և որևէ $\vec{a}(a,b)$ վեկտոր (սկ. 8.1): Դիտարկենք F պատկերին պատկանող որևէ $A(x,y)$ կետ: A կետից տեղադրենք $\vec{a}$ վեկտորին հավասար $\overrightarrow{AA'}$ վեկտորը, այսինքն $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$: Որոշենք տեղադրված $\overrightarrow{AA'}$ վեկտորի A' ծայրակետի (x',y') կոորդինատները: Ըստ եռանկյան կանոնի՝

$$\overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{OA}+\vec{a},$$

որտեղ $O(0,0)$ կետը կոորդինատների սկզբնակետն է:

Գիտենք, որ վեկտորների գումարի յուրաքանչյուր կոորդինատ հավասար է այդ վեկտորների համապատասխան կոորդինատների գումարին: Հետևաբար՝ A' կետի կոորդինատների համար ունենք՝

$$x'=x+a \text{ և } y'=y+b$$

($\overrightarrow{OA}$ վեկտորի կոորդինատներն են (x,y) -ը: Այս դեպքում կասենք, որ A' -ը A կետի կերպարն է, կամ A կետը անցնում է A' կետին a վեկտորով տեղաշարժելուց: Այժմ դիտարկենք F պատկերի բոլոր կետերի կերպարների F' բազմությունը $\vec{a}$ վեկտորով տեղաշարժելուց (նկ. 8.1):

Սահմանում

F պատկերի այն ձևափոխությունը, որի դեպքում նրա կամայական $A(x,y)$ կետ անցնում է $A'(x+a,y+b)$ կետին (a -ն և b -ն հաստատուններ են), կոչվում է $\vec{a}(a,b)$ վեկտորով զուգահեռ տեղափոխություն կամ պարզապես **F պատկերի զուգահեռ տեղափոխություն:**

Այսպիսով, $\vec{a}(a,b)$ վեկտորով զուգահեռ տեղափոխությունը տրվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$x'=x+a, y'=y+b,$$

որտեղ (x',y') -ը $A(x,y)$ կետի A' կերպարի կոորդինատներն են:

8.2. Զուգահեռ տեղափոխության հատկությունները

Թեորեմ 8.1: **Զուգահեռ տեղափոխությունը պահպանում է հեռավորությունները:**

Ապացուցում: Դիցուք տրված են $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ կետերը և $\vec{a}(a,b)$ վեկտորը: $\vec{a}$ վեկտորով զուգահեռ տեղափոխությամբ A և B կետերն անցնում են համապատասխանաբար $A'(x_1+a, y_1+b)$ և $B'(x_2+a, y_2+b)$ կետերին (նկ. 8.2): Համաձայն կետերի հեռավորությունը որոշող (1.3) բանաձևի՝

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

և

$$|A'B'| = \sqrt{(x_2 + a - x_1 - a)^2 + (y_2 + a - y_1 - a)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} :$$

Հետևաբար՝ $|AB|=|A'B'|$: Թեորեմն ապացուցված է:

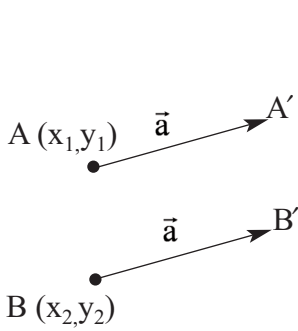
Տեղի ունի նաև հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 8.2: **Ուղղի զուգահեռ տեղափոխությունը կամ ինքն է, կամ այդ ուղղին զուգահեռ ուղիղ:**

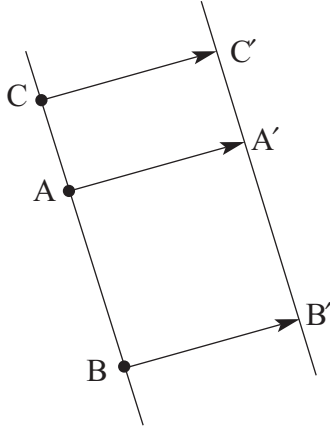
Ապացուցում: Դիցուք տրված են g ուղիղը և $\vec{a}(a,b)$ վեկտորը: g ուղղի վրա վերցնենք A և B կետերը: Դիցուք $\vec{a}$ -ով զուգահեռ տեղափոխությամբ A և B կետերն անցնում են համապատասխանաբար A' և B' կետերին: Ապացուցենք, որ g ուղիղն անցնում է $A'B'$ ուղղի, այսինքն՝ g ուղղի ցանկացած C կետի C' կերպարը պատկանում է $A'B'$ ուղղին, և հակառակը՝ $A'B'$ ուղղի կամայական C' կետ g ուղղի որևէ կետի կերպարն է: Դիտարկենք այն դեպքը, որ B կետը չի պատկանում AA' ուղղին (նկ. 8.3):

Դիցուք C կետը g ուղղի որևէ ուրիշ կետ է, իսկ C' -ը նրա կերպարն է: $CC'A'A$ զուգահեռագծից կստանանք, որ $A'C'$ ուղիղը զուգահեռ է g ուղ-

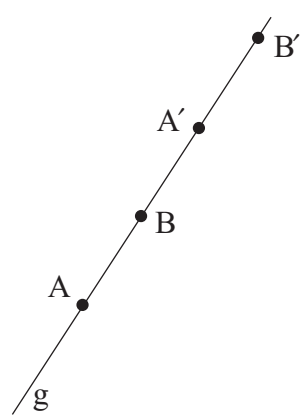
դին: Սակայն $A'B'$ նույնպես զուգահեռ է g ուղղին: Հետևաբար՝ $A'C'$ ուղիղը համընկնում է AB' ուղղի հետ, կամ C' -ը պատկանում է AB' ուղղին:



Նկ. 8.2



Նկ. 8.3



Նկ. 8.4

Դիցուք AB' ուղղի վրա տրված է որևէ C' կետ: C' կետով տանենք AA' -ին զուգահեռ ուղիղ, որի հատման կետը g ուղղի հետ նշանակենք C -ով: $CC'A'A$ զուգահեռագծից ունենք, որ $\overline{CC'} = \overline{AA'} = a$, այսինքն՝ C' -ը g ուղղին պատկանող C կետի կերպարն է: Այն դեպքում, երբ B կետը պատկանում է AA' ուղղին, g ուղիղը կանցնի ինքն իրեն (նկ. 8.4): Այս դեպքը դիտարկեք ինքնուրույն: Թերթենն ապացուցված է:

Դիցուք հարթության վրա տրված են երկու A և A' կետերը: Կա՞րողյոք զուգահեռ տեղափոխություն, որի ընթացքում A կետն անցնում է A' կետին: Այս հարցի պատասխանը դրական է: Իսկապես, եթե դիտարկեք $\vec{a} = \overrightarrow{AA'}$ վեկտորով զուգահեռ տեղափոխությունը, ապա A կետը կանցնի A' կետին: Նկատենք նաև, որ գոյություն ունի միայն մեկ $\vec{a}$ վեկտոր, այնպիսին որ $\vec{a}$ -ով զուգահեռ տեղափոխությունը A կետը տանում է A' կետին:

Առաջադրանքներ և խնդիրներ

117. Ջուգահեռ տեղափոխության դեպքում $A(1,1)$ կետն անցնում է $A'(-1,0)$ կետին: Ո՞ր վեկտորով է կատարվում այդ տեղափոխությունը:
118. Ջուգահեռ տեղափոխության դեպքում $A(1,1)$ կետն անցնում է $A'(-1,0)$ կետին: Ո՞ր կետին է անցնում կորդինատների սկզբնակետը:
119. Դիցուք կատարենք զուգահեռ տեղափոխություն $\vec{a}(1,2)$ վեկտորով, այնուհետև կատարենք զուգահեռ տեղափոխություն $\vec{b}(-3,1)$ վեկտորով: Ո՞ր վեկտորով զուգահեռ տեղափոխություն կստանանք:

120. Զուգահեռ տեղափոխությունն է արդյոք երկու զուգահեռ տեղափոխությունների հաջորդաբար կիրառումը:
121. Ինչպիսի՞ պատկերի է անցնում հատվածը զուգահեռ տեղափոխության դեպքում:
122. Ինչպիսի՞ պատկերի է անցնում շրջանագիծը զուգահեռ տեղափոխության ընթացքում:
123. Գոյություն ունի՞ արդյոք զուգահեռ տեղափոխություն, որի դեպքում $A(1,2)$ կետն անցնում է $A'(3,4)$ կետին, իսկ $B(0,1)$ $\vec{a}$ կետն անցնում է $B(-1,0)$ կետին:

Գլուխ 1-ի կրկնության հարցեր

1. Ի՞նչ է նշանակում կոորդինատների ուղղանկյուն համակարգ:
2. Ինչպե՞ս են որոշում կետի կոորդինատները:
3. Ո՞րն է կետի արսցիսը և ո՞րը՝ օրդինատը:
4. Ո՞րն է կոչվում xy հարթություն:
5. Ի՞նչ նշան ունեն կետի կոորդինատները համապատասխանաբար I, II, III, IV քառորդներում:
6. Ինչպե՞ս են գտնում տրված կետի՝ կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ համաչափ կետի կոորդինատները:
7. Ինչպե՞ս են գտնում տրված կետի՝ կոորդինատների առանցքների նկատմամբ համաչափ կետերի կոորդինատները:
8. Ի՞նչ բանաձևով են հաշվում հատվածի միջնակետի կոորդինատները:
9. Ի՞նչ բանաձևով են հաշվում երկու կետերի հեռավորությունը:
10. Տվե՛ք պատկերի հավասարման սահմանումը:
11. Տվե՛ք $Q(a, b)$ կենտրոնով և R շառավիղով շրջանագծի հավասարումը:
12. Ո՞ր թիվն է կոչվում ուղղի անկյունային գործակից:
13. Տվե՛ք կոորդինատների սկզբնակետով անցնող ուղղի հավասարումը:
14. Տվե՛ք ուղղի հավասարումը ընդհանուր դեպքում:
15. Սահմանե՛ք կամայական անկյան սինուսը:
16. Սահմանե՛ք կամայական անկյան կոսինուսը:
17. Ո՞րն է եռանկյունաչափական հիմնական նույնությունը:
18. Որո՞նք են բերման բանաձևերը:
19. Տվե՛ք վեկտորի սահմանումը:
20. Ո՞րն է կոչվում գրոյական վեկտոր:
21. Ո՞ր վեկտորներն են կոչվում հավասար:
22. Որո՞նք են կոչվում համագիծ վեկտորներ:
23. Ո՞ր թվերն են կոչվում վեկտորի կոորդինատներ:

24. Սահմանե՛ք վեկտորների գումարը:
25. Ձևակերպե՛ք վեկտորների գումարման տեղափոխական օրենքը:
26. Ձևակերպե՛ք վեկտորների գումարման գույքորդական օրենքը:
27. Սահմանե՛ք վեկտորների տարբերությունը:
28. Սահմանե՛ք վեկտորի և թվի արտադրյալը:
29. Ինչպե՞ս են վեկտորը վերածում ըստ երկու տարագիծ վեկտորների:
30. Որո՞նք են կոորդինատային վեկտորները:
31. Սահմանե՛ք երկու վեկտորների կազմած անկյունը:
32. Սահմանե՛ք երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալը:
33. Ինչպե՞ս է հաշվվում սկալյար արտադրյալը վեկտորների կոորդինատների միջոցով:
34. Սահմանե՛ք պատկերի զուգահեռ տեղափոխությունը:
35. Ի՞նչ է ուղղի զուգահեռ տեղափոխությունը:

Պիտե՛ք 1-ի լրացուցիչ խնդիրներ

124. $[AA_1]$ -ը, $[BB_1]$ -ը և $[CC_1]$ -ը ABC եռանկյան միջնագծերն են: Գտե՛ք $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}$ վեկտորը:
125. Օ-ն $A_1A_2A_3A_4A_5$ կանոնավոր հնգանկյան կենտրոնն է: Գտե՛ք $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4} + \overrightarrow{OA_5}$ վեկտորը:
- 126*. Օ-ն $A_1A_2A_3...A_n$ կանոնավոր n -անկյան կենտրոնն է: Ապացուցե՛ք, որ $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + ... + \overrightarrow{OA_n} = 0$:
- 127*. $[AA_1]$ -ը, $[BB_1]$ -ը, $[CC_1]$ -ը ABC եռանկյան միջնագծերն են: Ապացուցե՛ք, որ հարթության կամայական O կետի համար $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}$:
- 128*. Հարթության վրա տրված են ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունները: Ապացուցե՛ք, որ եթե $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = 0$, ապա այդ եռանկյունների միջնագծերի հատման կետերը համընկնում են:
129. Տրված է a կողմով ABC հավասարակողմ եռանկյունը: Գտե՛ք $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$ սկալյար արտադրյալը:
130. Տրված են երկու՝ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորներ: Ապացուցե՛ք, որ $(\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2$:
131. Կոորդինատային հարթության վրա տրված են չորս կետեր. $A(1, 2)$, $B(2, 3)$, $C(-1, 4)$ և $D(-3, -2)$: Գտե՛ք $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ սկալյար արտադրյալը:

- 132*. Հարթության վրա տրված է միավոր երկարության $[AB]$ հատվածը: Գտե՛ք C կետերի երկրաչափական տեղը, որոնց համար տեղի ունի $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 1$:
133. Գտե՛ք $A(0, \sqrt{3})$, $B(2, \sqrt{3})$, $C(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ գագաթներով եռանկյան անկյունների մեծությունները:
134. Տրված են հետևյալ գագաթները՝ $A(1,1)$, $B(4,1)$, $C(4,5)$: Գտե՛ք այդ եռանկյան անկյունների կոսինուսները:
135. Տրված են երկու՝ $\vec{a}(m,4)$ և $\vec{b}(3,2)$ վեկտորներ: m -ի ո՞ր արժեքի դեպքում են այդ վեկտորներն ուղղահայաց:
136. Ապացուցե՛ք, որ $A(2, 2)$, $B(4,6)$, $C(0,8)$, $D(-2,4)$ գագաթներով քառանկյունն ուղղանկյուն է:
137. Ապացուցե՛ք, որ $\vec{a}(m,n)$ և $\vec{b}(-n,m)$ վեկտորներն ուղղահայաց են:
138. Վեկտորների օգնությամբ ապացուցե՛ք, որ շեղանկյան անկյունագծերն ուղղահայաց են:
139. $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների կազմած անկյունը 120° է: Ապացուցե՛ք, որ $\vec{a}$ և $(2\vec{b}+\vec{a})$ վեկտորներն ուղղահայաց են:
140. Գտե՛ք միավոր վեկտորի կոորդինատները, որը զուգահեռ է $2x+3y=1$ ուղղին:
141. Գտե՛ք միավոր վեկտորի կոորդինատները, որն ուղղահայաց է $2x+3y=1$ ուղղին:
142. Ապացուցե՛ք, որ $\vec{n}(a,b)$ վեկտորն ուղղահայաց է $ax+by+c$ ուղղին:
143. ABC եռանկյան AC կողմի վրա տրված է D կետ, որի համար տեղի ունի $|AD|:|DC|=3:2$: Ապացուցե՛ք, որ $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{5} \overrightarrow{BA} + \frac{3}{5} \overrightarrow{BC}$:

ՆՄԱՆՈՒԹՅՈՒՆ: ՍՈՆՉՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՌԱՆԿՅԱՆ ԿՈՂՄԵՐԻ ԵՎ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԻՋԵՎ

Այս գլխի հիմնական նպատակն է սահմանել **նմանություն** հասկացությունը և ուսումնասիրել նման պատկերների հատկությունները: Նմանություն հասկացությունը հարթաչափության հիմնական հասկացություններից մեկն է: Նման պատկերների կամ առարկաների մենք հաճախ ենք հանդիպում մեր շրջապատում: Օրինակ՝ երկու տարբեր շառավիղներով շրջանագծեր, տարբեր չափերի խորանարդներ, տարբեր շառավիղներով գնդեր, շինությունն ու նրա մոդելը և այլն: Կարծես թե մենք կարողանում ենք նկատել նման պատկերները, սակայն այնքան էլ հեշտ չէ տալ ճշգրիտ մաթեմատիկական սահմանում նմանություն հասկացությանը: Այդ պատճառով նախ կտանք նման եռանկյունների սահմանումը, այնուհետև կխոսենք ընդհանուր պատկերների նմանության մասին: Այս գլխում կպարզաբանենք նաև նմանության մեթոդի գաղափարը, որն օգտագործվում է կառուցման խնդիրներ լուծելիս, տեղանքում չափողական աշխատանքներ կատարելիս:

§ 9. ՆՄԱՆ ԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ

9.1. Համեմատական հատվածներ: 7-րդ դասարանում մենք արդեն խոսել ենք այն մասին, որ երկու հատվածների երկարությունների հարաբերությունը կախված չէ երկարության չափման միավորի ընտրությունից և այդ հարաբերությունը մենք անվանեցինք երկու հատվածների հարաբերություն: Այսպիսով, տրված երկու՝ $[AB]$ և $[CD]$ հատվածների հարաբերությունը $\frac{|AB|}{|CD|}$ թիվն է: Այժմ դիտարկենք հատվածների երկու զույգ՝ $[AB]$, $[CD]$ և $[A_1B_1]$, $[C_1D_1]$:

Սահմանում

$[AB]$, $[CD]$ և $[A_1B_1]$, $[C_1D_1]$ հատվածների զույգերը կոչվում են համեմատական, եթե նրանց հարաբերությունները համընկնում են, այսինքն՝

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{|A_1B_1|}{|C_1D_1|}.$$

Նկատենք, որ նշված հատվածների զույգերի համեմատական լինելը համարժեք է

$$\frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|CD|}{|C_1D_1|}$$

հավասարությանը:

Հատվածների զույգերի համեմատականությունը որոշելիս բոլոր հատվածների երկարությունները պետք է գրել նույն չափման միավորով:

Օրինակ, եթե տրված $[AB]$, $[CD]$ և $[A_1B_1]$, $[C_1D_1]$ հատվածների զույգերի համար $|AB|=1$ սմ, $|CD|=2$ սմ, $|A_1B_1|=2$ սմ, $|C_1D_1|=4$ սմ, ապա այդ զույգը համեմատական է, քանի որ

$$\frac{|AB|}{|CD|} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{|A_1B_1|}{|C_1D_1|}:$$

Հետևյալ թեորեմը մեզ կօգնի կառուցելու համեմատական հատվածների զույգեր:

Թեորեմ 9.1:

Դիցուք անկյան կողմերը հատում են երկու զուգահեռ ուղիղներ: Այդ դեպքում անկյան մի կողմի վրա առաջացած հատվածների զույգը համեմատական է մյուս կողմի վրա առաջացած հատվածների զույգին:

Ապացուցում: Դիցուք A գագաթով անկյան կողմերից մեկը g և g_1 զուգահեռ ուղիղները հատում են B և B_1 կետերում, իսկ մյուս կողմը՝ համապատասխանաբար C և C_1 կետերում (նկ. 9.1): Ապացուցենք, որ

$$\frac{|AB|}{|BB_1|} = \frac{|AC|}{|CC_1|}:$$

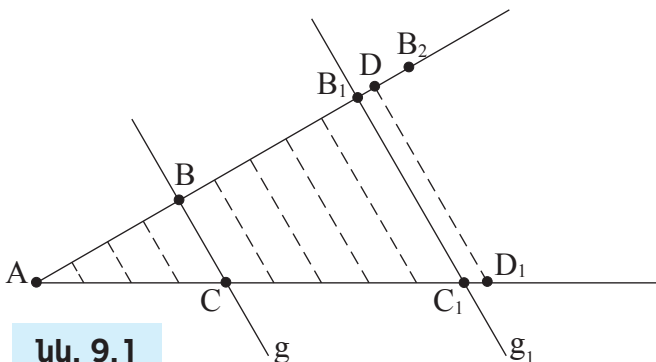
Ենթադրենք հակառակը. այդ հարաբերությունները հավասար չեն: Հնարավոր է երկու դեպք.

$$\frac{|AB|}{|BB_1|} > \frac{|AC|}{|CC_1|}:$$

Դիցուք B_2 -ը BB_1 ճառագայթի այն կետն է, որի համար

$$\frac{|AB|}{|BB_2|} = \frac{|AC|}{|CC_1|}:$$

Տրոհենք $[AB]$ հատվածը հավասար հատվածների, որոնցից յու-



նկ. 9.1

րաբանչյուրի երկարությունը փոքր է $|B_1B_2|$ -ից: Դիցուք h -ը տրոհման հատվածների երկարությունն է: Հաջորդաբար BB_1 ճառագայթի վրա B կետից տեղադրենք h երկարությամբ հատվածներ, մինչև նրանցից մեկի ծայրակետը ընկնի $[B_1B_2]$ հատվածի վրա, որը նշանակենք D -ով (նկատենք, որ $h < |B_1B_2|$, հետևաբար այդպիսի D կետ կգտնվի): Տրոհման կետերից տանենք g ուղղին զուգահեռ ուղիղներ: D_1 -ով նշանակենք D -ից տարված զուգահեռ ուղղի և AC_1 ճառագայթի հատման կետը: Համաձայն Թալեսի թեորեմի, տարված զուգահեռ ուղիղները $[AD_1]$ հատվածը կտրոհեն հավասար հատվածների, որոնց երկարությունները նշանակենք h_1 -ով: Ընդ որում, եթե $[AB]$ -ն տրոհված էր m թվով հատվածների, իսկ $[BD]$ -ն՝ n թվով, ապա $[AC]$ -ն նույնպես կտրոհվի m թվով հատվածների, իսկ $[C_1D_1]$ -ը՝ n :

$$\text{Հետևաբար՝} \quad \frac{|AB|}{|BD|} = \frac{m \cdot h}{n \cdot h} = \frac{m}{n} = \frac{m \cdot h_1}{n \cdot h_1} = \frac{|AC|}{|CD_1|}:$$

$$\text{Ունենք, որ} \quad \frac{|AB|}{|BB_2|} < \frac{|AB|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|CD_1|} < \frac{|AC|}{|CC_1|},$$

$$\text{քանի որ} \quad |BB_2| > |BD| \text{ և } |CC_1| < |C_1D_1|:$$

Վերջին անհավասարությունը հակասում է B_2 կետի ընտրությանը: Նույն կերպ կստանանք հակասություն նաև 2-րդ դեպքում, եթե ենթադրենք, որ $\frac{|AB|}{|BB_1|} < \frac{|AC|}{|CC_1|}$: Հետևաբար մեր ենթադրությունը ճիշտ չէր, այսինքն՝

$$\frac{|AB|}{|BB_1|} = \frac{|AC|}{|CC_1|}:$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Դիտողություն 1: Թեորեմ 9.1-ը ընդհանրացնում է Թալեսի թեորեմը: Իսկապես, եթե g և g_1 զուգահեռ ուղիղները անկյան մի կողմի վրա անջատեին հավասար հատվածներ, ապա նրանք անկյան մյուս կողմից նույնպես կանջատեն հավասար հատվածներ, քանի որ համաձայն Թեորեմ 9.1-ի նրանց հարաբերությունը պետք է լինի 1:

Դիտողություն 2: Ճիշտ է Թեորեմ 9.1-ի հակադարձ պնդումը: Այսինքն, եթե երկու ուղիղներ անկյան կողմերից անջատում են համեմատական հատվածների զույգեր, ապա այդ ուղիղները զուգահեռ են: Այս պնդումը ձևակերպված է որպես խնդիր (տե՛ս խնդիր 156-ը):

9.2. Եռանկյունների նմանությունը: Դիցուք հարթության վրա տրված են երկու եռանկյուններ:

Սահմանում

Երկու եռանկյուններ կոչվում են **նման**, եթե նրանք ունեն հավասար անկյուններ, իսկ համապատասխան կողմերի զույգերը համեմատական են:

Դիտողություն: Համապատասխան կոչվում են այն կողմերը, որոնք ընկած են հավասար անկյունների դիմաց:

Այսպիսով, եթե երկու նման եռանկյունների զագագրներ նշանակենք A, B, C և A_1, B_1, C_1 այնպես, որ $\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1$ (տե՛ս նկ. 9.2), ապա տեղի ունի նաև

$$\frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|AC|}{|A_1C_1|} = \frac{|BC|}{|B_1C_1|}.$$

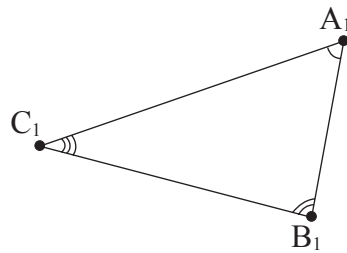
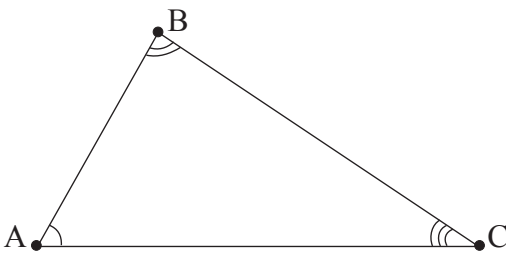
Այդ հարաբերությունը նշանակենք k -ով:

Սահմանում

Նման ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների համապատասխան կողմերի հարաբերությունը՝

$$k = \frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|BC|}{|B_1C_1|} = \frac{|AC|}{|A_1C_1|}$$

կոչվում է այդ եռանկյունների նմանության գործակից:



Ունենք նաև, որ $|AB| = k|A_1B_1|, |BC| = k|B_1C_1|, |AC| = k|A_1C_1|$:

նկ. 9.2

Նմանությունը նշանակելու համար կօգտագործենք $\sim$ նշանը: Այսինքն՝ ABC և $A_1B_1C_1$ նման եռանկյունների համար կգրենք՝ $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$:

Դիտողություն: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ գրառումը ենթադրում է՝ $\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1$, իսկ երբ ասում ենք $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ նմանության k գործակցով, ենթադրում ենք, որ

$$\frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|AC|}{|A_1C_1|} = \frac{|BC|}{|B_1C_1|} = k:$$

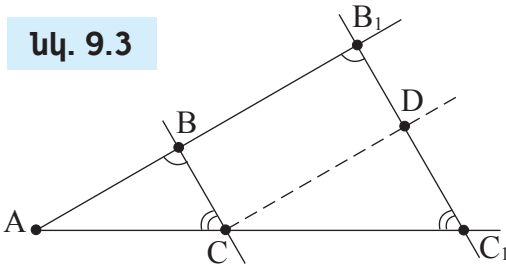
Այժմ բերենք նման եռանկյունների օրինակներ:

Թեորեմ 9.2:

Դիցուք A զագաթով անկյան կողմերից մեկը g և g_1 զուգահեռ ուղիղները հատում են B և B_1 կետերում, իսկ մյուս կողմը՝ համապատասխանաբար C և C_1 կետերում: Այս դեպքում $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (նկ. 9.3):

Ապացուցում: Դիտարկենք ABC և AB_1C_1 եռանկյունները: Ուստի զուգահեռ ուղիղների հատկության ունենք՝ $\angle B = \angle B_1$ և $\angle C = \angle C_1$, որպես g և g_1 զուգահեռ ուղիղները հատողով հատելիս առաջացած համապատասխան անկյուններ: Հետևաբար ABC և AB_1C_1 եռանկյուններն ունեն հավասար անկյուններ: Թեորեմ 9.1-ից հետևում է նաև, որ

սկ. 9.3



$$\frac{|BB_1|}{|AB|} = \frac{|CC_1|}{|AC|}.$$

Վերջին հավասարության երկու կողմերին գումարենք 1, կստանանք

$$\frac{|BB_1|}{|AB|} + 1 = \frac{|CC_1|}{|AC|} + 1 \text{ կամ } \frac{|AB_1|}{|AB|} = \frac{|AC_1|}{|AC|},$$

այսինքն այդ եռանկյունների երկու համապատասխան գույգեր համեմատական են: Մնում է ապացուցել, որ երրորդ գույգն էլ է համեմատական այդ գույգերին:

C կետից տանենք AB -ին զուգահեռ ուղիղ, որի հատման կետը $[B_1C_1]$ -ի հետ նշանակենք D -ով: Ստացվում է, որ C_1 գագաթով անկյան կողմերը հատված են AB և CD զուգահեռ ուղիղներով: Հետևաբար, համաձայն Թեորեմ 9.1-ի՝

$$\frac{|CC_1|}{|AC|} = \frac{|C_1D|}{|B_1D|} \text{ կամ } \frac{|AC_1|}{|AC|} = \frac{|C_1B_1|}{|B_1D|}$$

(ինչպես նախորդ դեպքում, առաջին հավասարության երկու կողմերին գումարեցինք 1): Կառուցումից հետևում է, որ BB_1DC -ն զուգահեռագիծ է, հետևաբար՝ $|BC| = |B_1D|$, որը տեղադրելով նախորդ հավասարության մեջ ստանում ենք

$$\frac{|AC_1|}{|AC|} = \frac{|C_1B_1|}{|BC|}.$$

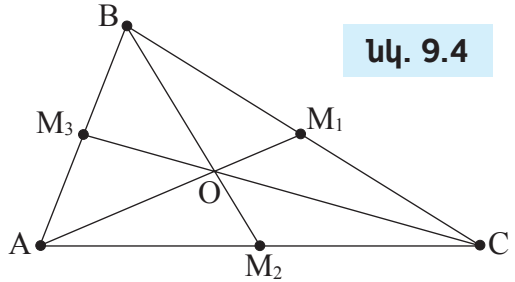
Հետևաբար ABC և AB_1C_1 եռանկյունների համապատասխան գույգերը համեմատական են: Թեորեմն ապացուցված է:

Առաջադրանքներ և խնդիրներ

144. $[AB]$, $[CD]$ և $[EF]$, $[KM]$ հատվածների գույգերը համեմատական են: Գտե՛ք $|EF|$ -ը, եթե $|AB|=7$ սմ, $|CD|=2$ սմ, $|KM|=4$ սմ:
145. Համեմատական են արդյոք $[AB]$, $[CD]$ և $[A_1B_1]$, $[C_1D_1]$ հատվածների գույգերը, եթե $|AB|=5$ սմ, $|CD|=2$ դմ, $|A_1B_1|=0,6$ դմ, $|C_1D_1|=20$ սմ:

146. $[AB]$, $[CD]$ և $[A_1B_1]$, $[C_1D_1]$ հատվածների զույգերը համեմատական են: Գտե՛ք $|CD|$ -ն, եթե $|AB|=12$ սմ, $|C_1D_1|=6$ դմ, $|A_1B_1|=0,5$ դմ:
147. Դիցուք C -ն $[AB]$ հատվածի միջնակետն է, իսկ C_1 -ը՝ $[A_1B_1]$ -ի: Համեմատական են արդյոք հետևյալ հատվածների զույգերը.
 ա) $[AC]$, $[AB]$ և $[A_1C_1]$, $[A_1B_1]$, բ) $[AC]$, $[CB]$ և $[A_1C_1]$, $[C_1B_1]$, գ) $[CB]$, $[AB]$ և $[A_1B_1]$, $[C_1B_1]$:

148. Դիցուք O -ն ABC եռանկյան միջնագծերի հատման կետն է, իսկ M_1 , M_2 , M_3 -ը՝ համապատասխանաբար $[BC]$, $[AC]$ և $[AB]$ կողմերի միջնակետերը (նկ. 9.4): Համեմատական են արդյոք հետևյալ հատվածները.



նկ. 9.4

- ա) $[AO]$, $[OM_1]$ և $[BO]$, $[OM_2]$,
 բ) $[AO]$, $[BO]$ և $[OM_1]$, $[OM_2]$,
 գ) $[CO]$, $[OB]$ և $[OM_3]$, $[OM_2]$,
 դ) $[AO]$, $[OM_1]$ և $[AM_2]$, $[M_2C]$:

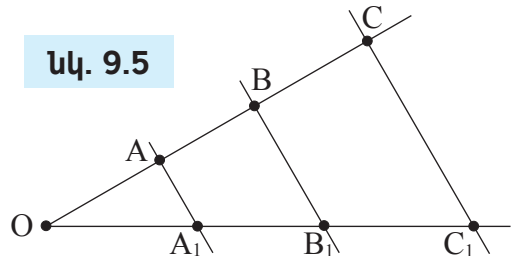
149. Նկ. 9.4-ում $|OA|=2$ սմ, $|OC|=3$ սմ: Գտե՛ք $\frac{|OM_3|}{|OM_1|}$ -ը:

150. Նկ. 9.4-ում $|OM_1|=3$ սմ, $|OM_2|=4$ սմ: Գտե՛ք $\frac{|OA|}{|OB|}$ -ն:

151. Նկ. 9.4-ում O կետից AC -ին տարված զուգահեռ ուղիղն ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանում $|M_1C|$ -ն:
152. Դիցուք երեք զուգահեռ ուղիղներ O գագաթով անկյան կողմերը հատում են համապատասխանաբար A , B , C և A_1 , B_1 , C_1 կետերում (նկ. 9.5): Ապացուցե՛ք, որ $[AB]$, $[BC]$ և $[A_1B_1]$, $[B_1C_1]$ հատվածների զույգերը համեմատական են:

153. Դիցուք նկ. 9.5-ում (տե՛ս խնդիր 152-ի պայմանները) հայտնի է, որ $|AB|=3$ սմ, $|BC|=7$ սմ, $|B_1C_1|=8$ սմ:
 Գտե՛ք $|A_1B_1|$ -ը:

նկ. 9.5



154. Ապացուցե՛ք, որ նկ. 9.5-ում (տե՛ս խնդիր 152-ի պայմանները) $[OA]$, $[BC]$ և $[OA_1]$, $[B_1C_1]$ հատվածների զույգերը համեմատական են:

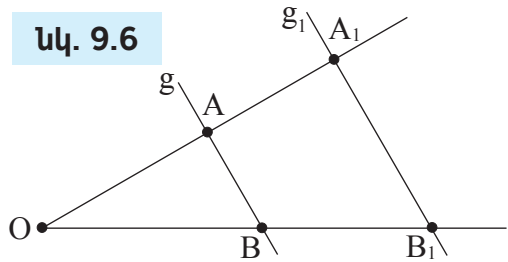
155. Դիցուք նկ. 9.5-ում (տե՛ս խնդիր 152-ի պայմանները) հայտնի է, որ $|OA|=2$ սմ, $|OA_1|=3$ սմ, $|B_1C_1|=5$ սմ: Գտե՛ք $|BC|$ -ն:

156. Դիցուք g և g_1 ուղիղները O գագաթով անկյան կողմերը հատում են համապատասխանաբար A, B և A_1, B_1 կետերում (տես նկ. 9.6):

Հայտնի է, որ $\frac{|OA|}{|OB|} = \frac{|OA_1|}{|OB_1|}$:

Ապացուցե՛ք, որ g և g_1 ուղիղները զուգահեռ են:

157. $[AB]$ հատվածի C կետը այն տրոհում է $|AC| : |CB| = m : n$ հարաբերությամբ: Գտե՛ք
ա) $|AB| : |AC|$, բ) $|AB| : |CB|$:



Նկ. 9.6

158. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, ընդ որում նմանության գործակիցը $\frac{1}{3}$ է: Գտե՛ք ABC եռանկյան կողմերի երկարությունները, եթե $|A_1B_1|=3$ սմ, $|A_1C_1|=4$ սմ, $|B_1C_1|=5$ սմ:
159. Դիցուք $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, ընդ որում նմանության գործակիցը $\frac{4}{5}$ է: Գտե՛ք $[AB]$ և $[A_1B_1]$ կողմերի երկարությունները, եթե նրանց գումարը 63սմ է:
160. ABC և KLM եռանկյունները նման են: Գտե՛ք ABC եռանկյան ամենամեծ անկյան մեծությունը, եթե $\angle A=20^\circ$, $\angle L=40^\circ$:
161. Երկու նման ոչ հավասար եռանկյուններից յուրաքանչյուրն ունի 12սմ և 18սմ երկարությամբ կողմեր: Գտե՛ք այդ եռանկյունների մյուս կողմերի երկարությունները:

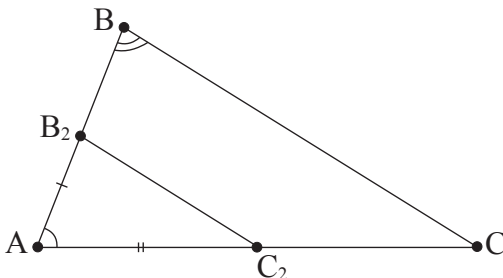
§ 10. ԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՆՄԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆԵՐԸ

Ինչպես և եռանկյունների հավասարության դեպքում, ավելի քիչ պայմանների ստուգումով կարելի է պարզել եռանկյունների նմանությունը:

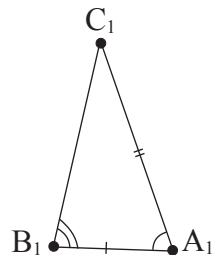
10.1. Եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշը

Թեորեմ 10.1: Եթե մի եռանկյան երկու անկյունները համապատասխանաբար հավասար են մյուս եռանկյան երկու անկյուններին, ապա այդ եռանկյունները նման են:

Ապացուցում: Դիցուք ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների համար տեղի ունի $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$: Ապացուցե՛ք, որ $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (նկ. 10.1):



Նկ. 10.1



Համաձայն եռանկյան ներքին անկյունների գումարի մասին թեորեմի՝
 $\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - \angle A_1 - \angle B_1 = \angle C_1$:

Այսպիսով ABC եռանկյան բոլոր երեք անկյունները համապատասխանաբար հավասար են $A_1B_1C_1$ եռանկյան անկյուններին: Այժմ ապացուցենք համապատասխան գույգերի համեմատական լինելը, այսինքն՝

$$\frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|A_1C_1|}{|AC|} = \frac{|B_1C_1|}{|BC|}:$$

AB ճառագայթի վրա A կետից տեղադրենք $|AB_2| = |A_1B_1|$ հատվածը, իսկ AC ճառագայթի վրա՝ $|AC_2| = |A_1C_1|$ հատվածը: $\triangle AB_2C_2 = \triangle A_1B_1C_1$ ըստ եռանկյունների հավասարության առաջին հայտանիշի, քանի որ $\angle A = \angle A_1$ և $|AB_2| = |A_1B_1|$, $|AC_2| = |A_1C_1|$ ըստ կառուցման: Հետևաբար՝ $\angle B_2 = \angle B_1$, և հաշվի առնելով $\angle B_1 = \angle B$ պայմանը, ստանում ենք՝ $\angle B_2 = \angle B$: Վերջին հավասարությունից հետևում է, որ B_2C_2 և BC ուղիղները զուգահեռ են: Հետևաբար, օգտվելով Թեորեմ 9.2-ից, ունենք

$$\frac{|AB_2|}{|AB|} = \frac{|AC_2|}{|AC|} = \frac{|B_2C_2|}{|BC|} \text{ կամ } \frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|A_1C_1|}{|AC|} = \frac{|B_1C_1|}{|BC|},$$

քանի որ $|AB_2| = |A_1B_1|$, $|AC_2| = |A_1C_1|$ ըստ կառուցման և $|B_2C_2| = |B_1C_1|$, որը հետևում էր AB_2C_2 և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների հավասարությունից: Թեորեմն ապացուցված է:

Դիտողություն: Եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշը անվանում են նաև նմանություն ըստ անկյունների:

10.2. Եռանկյունների նմանության երկրորդ հայտանիշը

Թեորեմ 10.2:

Եթե մի եռանկյան երկու կողմերը համեմատական են մյուս եռանկյան երկու կողմերին, իսկ այդ կողմերով կազմված անկյունները հավասար են, ապա այդ եռանկյունները նման են:

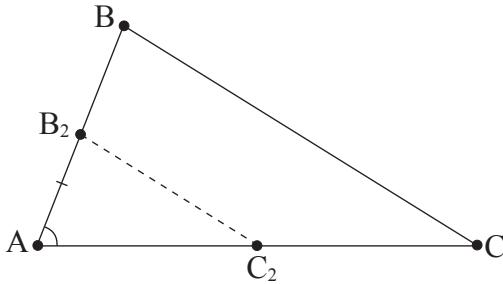
Ապացուցում: Դիցուք և ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների համար տեղի ունի $\angle A = \angle A_1$ և $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|A_1B_1|}{|A_1C_1|}$:

Ապացուցենք, որ $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$:

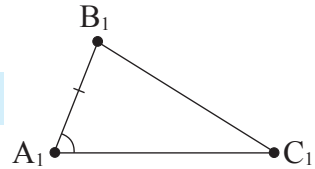
Համաձայն եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշի, բավական է ապացուցել, որ $\angle B = \angle B_1$: AB ճառագայթի վրա A կետից տեղադրենք $|A_1B_1|$ երկարությամբ $[AB_2]$ հատվածը և B_2 կետից տանենք BC -ին զուգահեռ B_2C_2 հատվածը (նկ. 10.2): Թեորեմ 9.1-ից հետևում է՝

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AB_2|}{|AC_2|}:$$

Համեմատելով այս հավասարությունը θ -երեմի պայմանի հետ և հաշվի առնելով, որ $|AB_2|=|A_1B_1|$, ստանում ենք, որ $|AC_2|=|A_1C_1|$:



Նկ. 10.2



Հետևաբար՝ $\triangle AB_2C_2 \sim \triangle A_1B_1C_1$, որտեղից ունենք, որ $\angle B_2 = \angle B_1$:

Մյուս կողմից, B_2C_2 ուղիղը զուգահեռ է BC ուղիին, որտեղից ունենք, որ $\angle B = \angle B_2$, որպես համապատասխան անկյուններ: Իսկ քանի որ $\angle B_2 = \angle B_1$, հետևաբար՝ $\angle B = \angle B_1$: θ -երեմն ապացուցված է:

10.3. Եռանկյունների նմանության երրորդ հայտանիշը

Թեորեմ 10.3: Եթե մի եռանկյան երեք կողմերը համեմատական են մյուս եռանկյան երեք կողմերին, ապա այդ եռանկյունները նման են:

Դիտողություն: Թեորեմ 10.3-ում նկատի ունենք զույգ առ զույգ համեմատական լինելը:

Ապացուցում: Դիցուք ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների համար տեղի ունի

$$\frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|AC|}{|A_1C_1|} = \frac{|BC|}{|B_1C_1|}:$$

Ապացուցենք, որ $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (տես նկ. 10.1), որի համար ապացուցենք, որ $\angle A = \angle A_1$ և $\angle B = \angle B_1$: Ինչպես և նախորդ դեպքերում, AB ճառագայթի վրա A կետից տեղադրենք $|A_1B_1|$ երկարությամբ $[AB_2]$ հատվածը, իսկ AC ճառագայթի վրա՝ A կետից $|A_1C_1|$ երկարությամբ $[AC_2]$ հատվածը:

Միացնենք B_2 և C_2 կետերը: θ -երեմի պայմանից և $|AB_2|=|A_1B_1|$, $|AC_2|=|A_1C_1|$ -ից (ըստ կառուցման) ունենք

$$\frac{|AB_2|}{|AB|} = \frac{|AC_2|}{|AC|}:$$

Հետևաբար, համաձայն θ -երեմ 9.2-ի, $\triangle AB_2C_2 \sim \triangle ABC$, ուրեմն $\angle B_2 = \angle B$ և $\angle C_2 = \angle C$ որպես համապատասխան անկյուններ: Ունենք նաև, որ

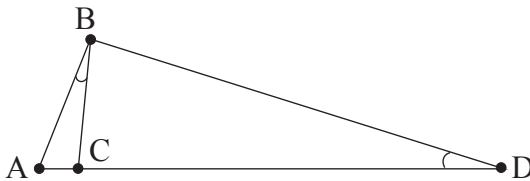
$$\frac{|B_2C_2|}{|BC|} = \frac{|AB_2|}{|AB|} = \frac{|A_1B_1|}{|AB|} = \frac{|B_1C_1|}{|BC|},$$

որտեղից ստանում ենք $|B_2C_2|=|B_1C_1|$: Այսպիսով ստացանք, որ $\Delta AB_2C_2=\Delta A_1B_1C_1$ ըստ եռանկյունների հավասարության երրորդ հայտանիշի ($|AB_2|=|A_1B_1|$, $|AC_2|=|A_1C_1|$) ըստ կառուցման և $|B_2C_2|=|B_1C_1|$ ըստ ապացույցի): Հետևաբար՝ $\angle B_1=\angle B_2$, $\angle A_1=\angle A$, $\angle C_1=\angle C_2$: Իսկ քանի որ $\angle B_2=\angle B$ և $\angle C_2=\angle C$, ուրեմն՝ $\angle B_1=\angle B$, և $\angle C_1=\angle C$: Թեորեմն ապացուցված է:

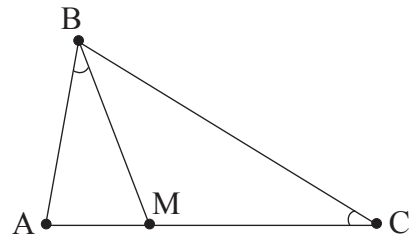
Առաջադրանքներ և խնդիրներ

162. ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների համար հայտնի է, որ $\angle A=\angle A_1$, $\angle C=\angle C_1$: Գտե՛ք $|A_1C_1|$ -ը, եթե $|AB|=5$ սմ, $|AC|=3$ սմ, $|A_1B_1|=7$ սմ:
163. ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների համար հայտնի է, որ $\angle A=\angle B_1$, $\angle C=\angle A_1$: Գտե՛ք $|AC|$ -ն, եթե $|BC|=7$ սմ, $|A_1C_1|=5$ սմ, $|A_1B_1|=4$ սմ:
164. ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների համար հայտնի է, որ $\angle A=\angle C_1$ և $\angle B=\angle A_1$: Գրե՛ք այդ եռանկյունների նմանությունը՝ օգտվելով նմանության սիմվոլից:
165. Նմա՞ն են արդյոք եռանկյունները, եթե նրանցից մեկի կողմերի երկարություններն են 4սմ, 2սմ, 5սմ, իսկ մյուսինը՝ 3սմ, 6սմ, 7,5սմ:
166. Նմա՞ն են արդյոք երկու հավասարասրուն եռանկյունները, եթե նրանցից մեկն ունի 70° -ի մեծության անկյուն, իսկ մյուսը՝ 50° -ի:
167. Նմա՞ն են արդյոք երկու ուղղանկյուն եռանկյունները, եթե նրանցից մեկն ունի 20° -ի մեծության անկյուն, իսկ մյուսը՝ 70° -ի:
168. $[AB]$ և $[CD]$ հատվածները հատվում են O կետում, ընդ որում $\frac{|AO|}{|OB|} = \frac{|OD|}{|OC|}$: Գտե՛ք $\angle BCO$ -ն, եթե $\angle ADO=70^\circ$:
169. $[AM_1]$ -ը, $[BM_2]$ -ը և $[CM_3]$ -ը ABC եռանկյան միջնագծերն են: Ապացուցե՛ք, որ $\Delta M_1M_2M_3 \sim \Delta ABC$:
170. $[AM_1]$ -ը, $[BM_2]$ -ը և $[CM_3]$ -ը ABC եռանկյան միջնագծերն են, O -ն՝ նրանց հատման կետը: Ապացուցե՛ք, որ $\Delta OM_3M_1 \sim \Delta OCA$:
171. Ապացուցե՛ք, որ կամայական երկու հավասարակողմ եռանկյուններ նման են:
172. Ապացուցե՛ք, որ կամայական երկու հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյուններ նման են:
173. Ապացուցե՛ք, որ երկու հավասարասրուն եռանկյուններ նման են, եթե նրանց գագաթների անկյունները հավասար են:
174. Ապացուցե՛ք, որ երկու հավասարասրուն եռանկյուններ նման են, եթե նրանց հիմքերին առընթեր անկյունները հավասար են:
175. Ապացուցե՛ք, որ երկու ուղղանկյուն եռանկյուններ նման են, եթե նրանք ունեն հավասար սուր անկյուններ:

176. Դիցուք O -ն $[AD]$ և $[BC]$ հիմքերով $ABCD$ սեղանի անկյունագծերի հատման կետն է: Ապացուցե՛ք, որ AOD և COB եռանկյունները նման են:
177. Դիցուք O -ն $[AD]$ և $[BC]$ հիմքերով $ABCD$ սեղանի անկյունագծերի հատման կետն է: Հայտնի է, որ $|BC|=3$ սմ, $|AD|=5$ սմ, $|AO|=2$ սմ: Գտե՛ք $|OC|$ -ն:
178. Դիցուք O -ն $[AD]$ և $[BC]$ հիմքերով $ABCD$ սեղանի անկյունագծերի հատման կետն է: Հայտնի է, որ $|BC|=4$ սմ, $|AD|=8$ սմ, $|BD|=5$ սմ: Գտե՛ք $|OB|$ -ն:
179. Յսմ և 5 սմ շառավիղներով շրջանագծերը շոշափում են արտաքինապես A կետով: A կետով անցնող ուղիղը հատում է առաջին շրջանագիծը B կետում, իսկ երկրորդ շրջանագիծը՝ C կետում: Գտե՛ք $|AB|$ -ն և $|AC|$ -ն, եթե $|BC|=8$ սմ:
180. ABC եռանկյան AC կողմի շարունակության վրա տրված է D կետը այնպես, որ $\angle BDC = \angle ABC$ (նկ. 10.3): Գտե՛ք $|AC|$ -ն, եթե $|AB|=4$ սմ, $|DC|=12$ սմ:



նկ. 10.3



նկ. 10.4

181. ABC եռանկյան $[AC]$ կողմի վրա տրված է M կետը այնպես, որ $\angle ABM = \angle ACB$ (նկ. 10.4): Գտե՛ք $|AB|$ -ն, եթե $|AM|=1$ սմ, $|MC|=4$ սմ:

§ 11. ՆՄԱՆ ԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Նման եռանկյուններն օժտված են որոշակի հատկությամբ, որը, ինչպես կտեսնենք հետագայում, բնորոշ է բոլոր նման պատկերներին: Պարզվում է, որ նման եռանկյունների «համապատասխան» գծային տարրերի հարաբերությունը հավասար է այդ եռանկյունների նմանության գործակցին: Իհարկե, այս պնդումը ունի պարզաբանման կարիք, և հետագա թեորեմները պարզաբանում են այն:

11.1. Նման եռանկյունների գծային տարրերի հարաբերությունը

Թեորեմ 11.1:

Նման եռանկյունների պարագծերի հարաբերությունը հավասար է այդ եռանկյունների նմանության գործակցին:

Ապացուցում: Դիցուք $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ և k -ն նրանց նմանության գործակիցն է, այսինքն՝

$$\frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|BC|}{|B_1C_1|} = \frac{|AC|}{|A_1C_1|} = k,$$

կամ $|AB|=k \cdot |A_1B_1|$, $|AC|=k \cdot |A_1C_1|$, $|BC|=k \cdot |B_1C_1|$:

P -ով նշանակենք ABC եռանկյան պարագիծը, իսկ P_1 -ով՝ $A_1B_1C_1$ եռանկյան պարագիծը: Ունենք $P=|AB|+|AC|+|BC|=k|A_1B_1|+k|A_1C_1|+k|B_1C_1|=k(|A_1B_1|+|A_1C_1|+|B_1C_1|)=kP_1$, որտեղից հետևում է, որ

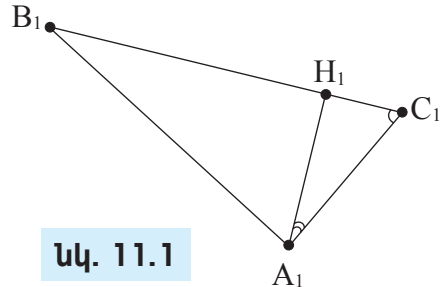
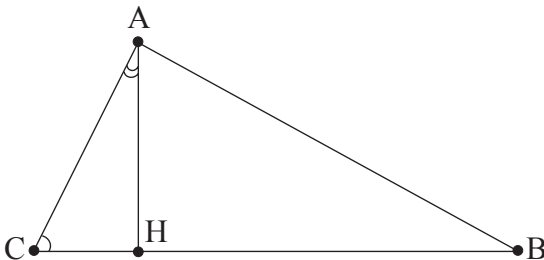
$$\frac{P_{ABC}}{P_{A_1B_1C_1}} = k :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 11.2:

Նման եռանկյունների համապատասխան կողմերին տարված բարձրությունների հարաբերությունը հավասար է այդ եռանկյունների նմանության գործակիցին:

Ապացուցում: Դիցուք $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ և k -ն նրանց նմանության գործակիցն է: Դիցուք $[AH]$ -ը և $[A_1H_1]$ -ը համապատասխանաբար ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների բարձրություններն են (նկ. 11.1):



նկ. 11.1

Ապացուցենք, որ $\frac{|AH|}{|A_1H_1|} = k$: ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների նմանությունից ունենք, որ $\angle C = \angle C_1$: Ըստ եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշի, նման են նաև AHC և $A_1H_1C_1$ ուղղանկյուն եռանկյունները, իրոք $\angle C = \angle C_1$ և $\angle H = \angle H_1 = 90^\circ$:

Հետևաբար՝

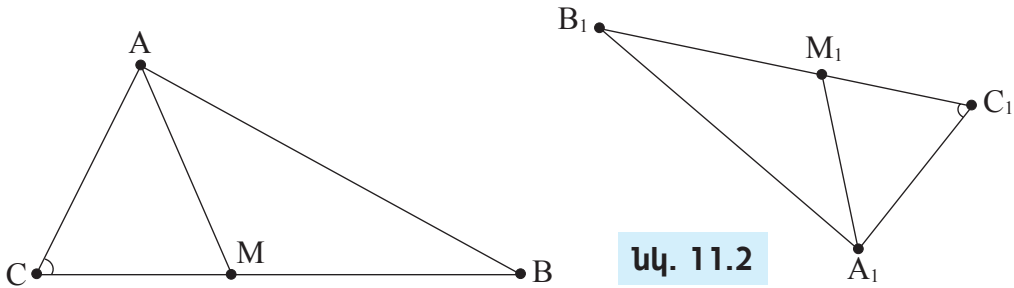
$$\frac{|AH|}{|A_1H_1|} = \frac{|AC|}{|A_1C_1|} = k :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 11.3:

Նման եռանկյունների համապատասխան կողմերին տարված միջնագծերի հարաբերությունը հավասար է այդ եռանկյունների նմանության գործակիցին:

Ապացուցում: Դիցուք $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, և k -ն նրանց նմանության գործակիցն է: Դիցուք AM -ը և A_1M_1 -ը համապատասխանաբար այդ եռանկյունների միջնագծերն են (նկ. 11.2): Ապացուցենք, որ $\frac{|AM|}{|A_1M_1|} = k$:



նկ. 11.2

ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների նմանությունից ունենք՝

$$\angle C = \angle C_1 \quad \text{և} \quad \frac{|AC|}{|A_1C_1|} = \frac{|CB|}{|C_1B_1|} = k:$$

Դիտարկենք AMC և $A_1M_1C_1$ եռանկյունները: Քանի որ $\angle C = \angle C_1$ և

$$\frac{|AC|}{|A_1C_1|} = \frac{|CB|}{|C_1B_1|} = \frac{2|CM|}{2|C_1M_1|} = \frac{|CM|}{|C_1M_1|},$$

իետևաբար AMC և $A_1M_1C_1$ եռանկյունները նման են ըստ եռանկյունների նմանության երկրորդ հայտանիշի: Ուրեմն՝

$$\frac{|AM|}{|A_1M_1|} = \frac{|AC|}{|A_1C_1|} = k:$$

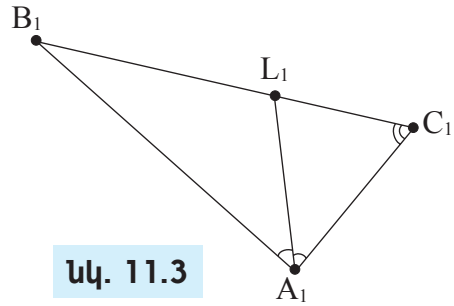
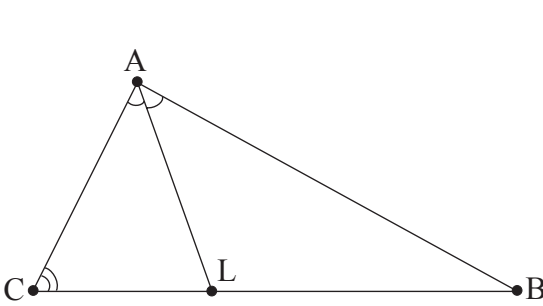
Թերեմն ապացուցված է:

Թեորեմ 11.4: Նման եռանկյունների համապատասխան կողմերին տարված կիսորդների հարաբերությունը հավասար է այդ եռանկյունների նմանության գործակիցին:

Ապացուցում: Դիցուք $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ նմանության k գործակցով, և $[AL]$ -ը, $[A_1L_1]$ -ը համապատասխանաբար այդ եռանկյունների կիսորդներն են (նկ. 11.3): Ապացուցենք, որ

$$\frac{|AL|}{|A_1L_1|} = k:$$

ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների նմանությունից ունենք՝ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$: Ըստ եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշի նման են նաև ALC և $A_1L_1C_1$ եռանկյունները, քանի որ $\angle C = \angle C_1$ և $\angle LAC = \frac{\angle A}{2} = \frac{\angle A_1}{2} = \angle LA_1C_1$:



սկ. 11.3

Հետևաբար՝

$$\frac{|AL|}{|A_1L_1|} = \frac{|AC|}{|A_1C_1|}, \text{ իսկ քանի որ } \frac{|AC|}{|A_1C_1|} = k, \text{ ուրեմն } \frac{|AL|}{|A_1L_1|} = k :$$

Թերեւմն ապացուցված է:

11.2. Նման եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը

Թեորեմ 11.5: Նման եռանկյունների մակերեսների հարաբերությունը հավասար է այդ եռանկյունների նմանության գործակցի քառակուսուն:

Ապացուցում: Դիցուք $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, և k -ն նրանց նմանության գործակիցն է: Ապացուցենք, որ $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2$: Դիցուք $[AH]$ -ը և $[A_1H_1]$ -ը համապատասխանաբար ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների բարձրություններն են: Ունենք

$$S_{ABC} = \frac{|BC| \cdot |AH|}{2}, \quad S_{A_1B_1C_1} = \frac{|B_1C_1| \cdot |A_1H_1|}{2}:$$

Եռանկյունների նմանությունից և Թերեմ 11.2-ից հետևում է, որ $|BC|=k|B_1C_1|$ և $|AH|=k|A_1H_1|$:

Հետևաբար՝

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{\frac{|BC| \cdot |AH|}{2}}{\frac{|B_1C_1| \cdot |A_1H_1|}{2}} = \frac{k \cdot |B_1C_1| \cdot k \cdot |A_1H_1|}{|B_1C_1| \cdot |A_1H_1|} = k^2 :$$

Թերեւմն ապացուցված է:

Առաջադրանքներ և խնդիրներ

182. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$: Գտե՛ք այդ եռանկյունների նմանության գործակիցը, եթե ABC եռանկյան պարագիծը հավասար է 7սմ, իսկ $A_1B_1C_1$ եռանկյան պարագիծը՝ 2սմ:

183. Քանի՞ անգամ կփոքրանա եռանկյան պարագիծը, եթե նրա բոլոր կողմերը փոքրացնենք 3 անգամ:
184. Քանի՞ անգամ կմեծանա եռանկյան պարագիծը, եթե նրա բոլորը կողմերը մեծացնենք 4 անգամ:
185. Երկու նման եռանկյունների ամենամեծ կողմերի երկարություններն են 35սմ և 14սմ: Գտե՛ք այդ եռանկյունների պարագծերը, եթե նրանց գումարը 140սմ է:
186. M_1 -ը, M_2 -ը, M_3 -ը ABC եռանկյան կողմերի միջնակետերն են: Գտե՛ք $M_1M_2M_3$ եռանկյան պարագիծը, եթե ABC եռանկյան պարագիծը 15սմ է:
187. Դիցուք O-ն ABC եռանկյան միջնագծերի հատման կետն է: M_3 -ը [AB] կողմի միջնակետն է, իսկ M_1 -ը՝ [BC] կողմի: Գտե՛ք OAC եռանկյան պարագիծը, եթե OM_3M_1 եռանկյան պարագիծը 17սմ է:
188. Դիցուք $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, [BH]-ը և $[B_1H_1]$ -ը այդ եռանկյունների բարձրություններն են: Գտե՛ք |AB|-ն, եթե $|A_1B_1|=6$ սմ, $|BH|=4$ սմ, $|B_1H_1|=2$ սմ:
189. Դիցուք $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, [AM]-ը և $[A_1M_1]$ -ը այդ եռանկյունների միջնագծերն են: Գտե՛ք $|A_1M_1|$ -ը, եթե $|BC|=7$ սմ, $|B_1C_1|=4$ սմ, $|AM|=6$ սմ:
- 190*. ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների մեջ տարված են [AM], [BN], [CK] և $[A_1M_1]$, $[B_1N_1]$, $[C_1K_1]$ միջնագծերը: Ապացուցե՛ք, որ $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, եթե $\frac{|AM|}{|A_1M_1|} = \frac{|BN|}{|B_1N_1|} = \frac{|CK|}{|C_1K_1|}$:
191. Դիցուք $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, [BL]-ը և $[B_1L_1]$ -ը այդ եռանկյունների կիսորդներն են: Գտե՛ք [BL]-ը, եթե $|AC|=5$ սմ, $|A_1C_1|=4$ սմ, $|B_1L_1|=3$ սմ:
192. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$: Գտե՛ք այդ եռանկյունների նմանության գործակիցը, եթե $S_{ABC}=9$ սմ², $S_{A_1B_1C_1}=4$ սմ²:
193. Քանի՞ անգամ կփոքրանա եռանկյան մակերեսը, եթե նրա բոլոր կողմերը փոքրացնենք 3 անգամ:
194. Քանի՞ անգամ կմեծանա եռանկյան մակերեսը, եթե նրա բոլոր կողմերը մեծացնենք 5 անգամ:
195. M_1 -ը, M_2 -ը, M_3 -ը ABC եռանկյան կողմերի միջնակետերն են: Գտե՛ք ABC եռանկյան մակերեսը, եթե $M_1M_2M_3$ եռանկյան մակերեսը 7սմ² է:

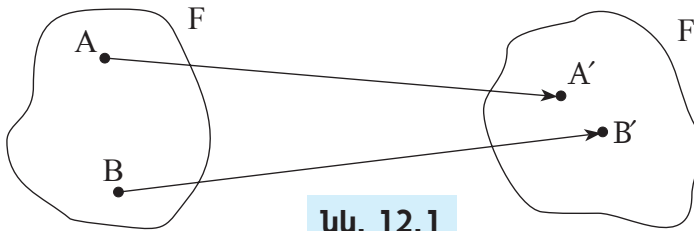
§ 12. ՆՄԱՆ ՊԱՏԿԵՐՆԵՐ

Այժմ սահմանենք նմանության հասկացությունը կամայական պատկերների համար, այսինքն՝ ինչ ենք հասկանում՝ ասելով երկու պատկերներ նման են: Նմանության սահմանումը հիմնվում է նախորդ պարագրա-

Ֆուն պարզաբանված սկզբունքի վրա. **նման եռանկյունների համապատասխան տարրերի հարաբերությունները հավասար են:** Ընդհանուր դեպքում համապատասխան տարրերը հասկանալու համար անհրաժեշտ է սահմանել երկու պատկերների փոխմիարժեք համապատասխանության (արտապատկերման) գաղափարը:

12.1. Փոխմիարժեք համապատասխանություն

Դիցուք հարթության վրա տրված են երկու՝ F և F' պատկերներ:



Ենթադրենք, ինչ-որ օրենքով F պատկերի յուրաքանչյուր կետի համապատասխանում է F' պատկերի մեկ կետ: Նկ. 12.1-ում A կետին համապատասխանում է A' կետը, իսկ B կետին՝ B' -ը: Ենթադրենք նաև, որ F' պատկերի յուրաքանչյուր կետ հանդիսանում է F պատկերի միայն մեկ կետի համապատասխան կետը: Այս դեպքում կասենք, որ F և F' պատկերների միջև հաստատված է **փոխմիարժեք համապատասխանություն:**

Նախորդ գլխում դիտարկված զուգահեռ տեղափոխությունը փոխմիարժեք համապատասխանության օրինակ է: Իսկապես, որևէ F պատկերի և նրա $\vec{a}$ վեկտորով զուգահեռ տեղաշարժված պատկերի միջև կարելի է հաստատել փոխմիարժեք համապատասխանություն հետևյալ կերպ. F պատկերի յուրաքանչյուր A կետի համապատասխանեցնենք A' կետը, որտեղ

$$\overrightarrow{AA'} = \vec{a}:$$

Պարզվում է, որ ցանկացած երկու նման եռանկյունների միջև կարելի է հաստատել փոխմիարժեք համապատասխանություն:

Թեորեմ 12.1:

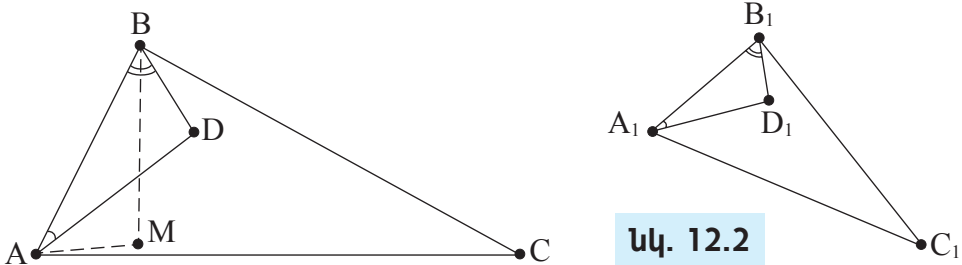
Երկու նման եռանկյունների միջև կարելի է հաստատել փոխմիարժեք համապատասխանություն, այնպես որ մի եռանկյան կամայական երկու կետերի և նրանց համապատասխան կետերի հեռավորությունների հարաբերությունը լինի հավասար այդ եռանկյունների նմանության գործակցին:

Թեորեմը պնդում է, որ եթե $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, և k -ն նրանց նմանության գործակիցն է, ապա գոյություն ունի այդ եռանկյունների միջև փոխմիարժեք համապատասխանություն այնպես, որ եթե D -ն և M -ը ABC

եռանկյան որևէ երկու կետեր են, իսկ D_1 -ը և M_1 -ը՝ նրանց համապատասխան կետերը $A_1B_1C_1$ եռանկյան մեջ, ապա

$$\frac{|DM|}{|D_1M_1|} = k :$$

Ապացուցում: Դիցուք $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (նկ. 12.2):



նկ. 12.2

Սահմանենք փոխմիարժեք համապատասխանություն ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկյունների միջև հետևյալ կերպ: Դիցուք D -ն ABC եռանկյան որևէ կետ է, ենթադրենք միայն, որ D -ն չի պատկանում $[AB]$ կողմին: Դիտարկենք ABD եռանկյունը: D կետին համապատասխանեցնենք $A_1B_1C_1$ եռանկյան D_1 կետը այնպես, որ եռանկյուն ABD -ն նման լինի եռանկյուն $A_1B_1D_1$ -ին: Համոզվենք, որ ABC -ի յուրաքանչյուր D կետի համար գոյություն ունի $A_1B_1C_1$ -ից համապատասխան կետ: Իրոք, A_1B_1 ճառագայթից տեղադրենք $\angle BAD$ մեծության անկյուն, իսկ B_1A_1 ճառագայթից՝ $\angle ABD$ մեծության անկյուն (ինչպես պատկերված է նկ. 12.2-ում): Այդ անկյունների համապատասխան կողմերի հատման կետը նշանակենք D_1 -ով, որը կլինի որոնելի կետը, քանի որ $\triangle ABD \sim \triangle A_1B_1D_1$ ըստ եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշի: Նկատենք, որ այդ եռանկյունների նմանության գործակիցը դարձյալ k -ն է (քանի որ այդ եռանկյունների համար $[AB]$ և $[A_1B_1]$ կողմերը համապատասխան են): Եթե D -ն պատկանում է $[AB]$ -ին, ապա համապատասխան D կետը ընտրենք $[A_1B_1]$ -ից այնպես, որ $|AD|:|DB|=|A_1D_1|:|D_1B_1|$:

Դիցուք M -ը ABC եռանկյան մեկ այլ կետ է, և M_1 -ը նրան համապատասխան կետն է, այսինքն՝ $\triangle ABM \sim \triangle A_1B_1M_1$ նույն նմանության k գործակցով): ABD , $A_1B_1D_1$ և ABM , $A_1B_1M_1$ եռանկյունների նմանությունից հետևում է՝

$$\frac{|AD|}{|A_1D_1|} = \frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|AM|}{|A_1M_1|} = k :$$

Այժմ դիտարկենք ADM և $A_1D_1M_1$ եռանկյունները: Վերջին պայմանից հետևում է, որ $[AD]$, $[AM]$ և $[A_1D_1]$ կողմերը համեմատական են և, քանի որ նրանց կազմած անկյունները $\angle DAM = \angle MAB - \angle DAB = \angle M_1A_1B_1 - \angle D_1A_1B_1 = \angle D_1A_1M_1$ հավասար են, հետևաբար $\triangle ADM \sim \triangle A_1D_1M_1$ ըստ եռանկյունների նմանության երկրորդ հայտանիշի:

Ուրեմն՝

$$\frac{|DM|}{|D_1M_1|} = \frac{|AD|}{|A_1D_1|} = k :$$

Թեորեմն ապացուցված է:

12.2. Նման պատկերների սահմանումը: Թեորեմ 12.1-ի պնդումը հուշում է այն սկզբունքը, որի օգնությամբ սահմանվում է երկու պատկերների նմանությունը:

Սահմանում

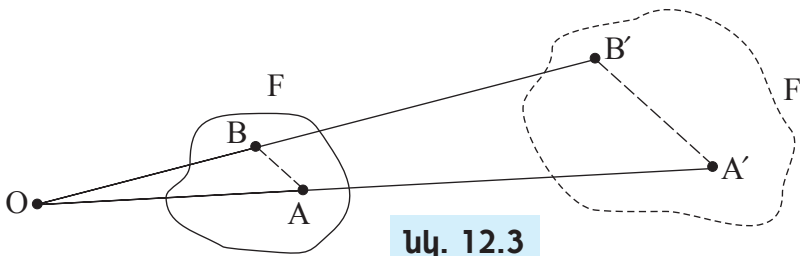
Հարթության վրա տրված երկու պատկերներ կոչվում են **նման**, եթե նրանց միջև կարելի է հաստատել փոխմիարժեք համապատասխանություն, այնպես որ այդ պատկերներից մեկի ցանկացած երկու կետերի հեռավորության և նրանց համապատասխան կետերի հեռավորության հարաբերությունը լինի հաստատուն:

Պարզաբանենք սահմանումը: Դիցուք տրված են երկու՝ F և F' պատկերներ: Նրանք նման են, եթե նրանց միջև կարելի է հաստատել փոխմիարժեք համապատասխանություն, այնպես որ F պատկերի ցանկացած A և B կետերի ու նրանց համապատասխան A' և B' կետերի համար տեղի ունի

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = k,$$

ընդ որում k -ն հաստատուն մեծություն է, կախված չէ A և B կետերի ընտրությունից և կոչվում է այդ պատկերների նմանության գործակից:

Վեկտորի հասկացությունը հնարավորություն է տալիս կառուցելու նման պատկերների բազում օրինակներ: Դիցուք հարթության վրա տրված է F պատկեր, որն է O կետ և k դրական թիվ (նկ. 12.3):



նկ. 12.3

Դիցուք A -ն F պատկերի որևէ կետ է: A կետին համապատասխանեցնենք հարթության A' կետը այնպես, որ

$$\vec{OA'} = k \cdot \vec{OA} :$$

F պատկերի բոլոր կետերին համապատասխան կետերի բազմությունը նշանակենք F' -ով:

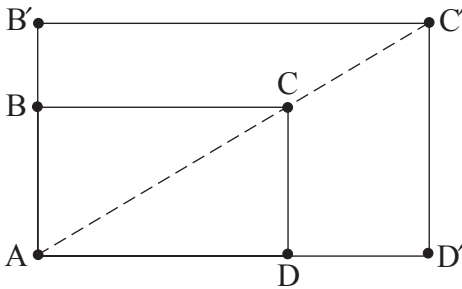
Պնդում: F և F' պատկերները նման են k նմանության գործակցով:

Իսկապես, եթե A -ն և B -ն F պատկերի ցանկացած երկու կետեր են, իսկ A' -ը և B' -ը նրան համապատասխան կետերն են, ապա OAB և $O'A'B'$ եռանկյունների նմանությունից (ապացուցե՛ք ինքնուրույն) հետևում է՝

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|O'A'|}{|OA|} = k:$$

Պնդումն ապացուցված է:

Դիցուք հարթության վրա տրված է $ABCD$ ուղղանկյունը (այն դիտարկենք որպես F պատկեր), որպես O կետ վերցնենք A կետը և կատարելով վերը նկարագրված գործողությունը որևէ k -ի համար՝ կստանանք երկու նման ուղղանկյուններ (նկ. 12.4):



նկ. 12.4

Առաջադրանքներ և խնդիրներ

196. Ապացուցե՛ք, որ ցանկացած երկու շրջանագծեր նման են:
197. Ապացուցե՛ք, որ ցանկացած երկու քառակուսի նման են:
198. Ապացուցե՛ք, օգտվելով նկ. 12.4-ից, որ երկու ուղղանկյուններ նման են, եթե նրանց կից կողմերը համեմատական են:
199. Նմա՞ն են արդյոք երկու քառանկյուններ, որոնց անկյունները համապատասխանաբար հավասար են:
200. Նմա՞ն են արդյոք երկու ուղղանկյուններ, եթե նրանց անկյունագծերի կազմած անկյունները հավասար են:
201. Նմա՞ն են արդյոք $3l$ և $1l$ տարողությամբ երկու ապակե տարաները:
202. $ABCD$ և $A_1B_1C_1D_1$ քառանկյունները նման են: Հայտնի է, որ $ABCD$ քառանկյան կողմերը հարաբերում են, ինչպես $2:3:5:7$: Գտե՛ք $A_1B_1C_1D_1$ քառանկյան կողմերի երկարությունները, եթե նրա ամենամեծ կողմի երկարությունը 21 սմ է:
- 203*. Սեղանի հիմքերի երկարություններն են a և b : Հիմքերին զուգահեռ ուղիղը սեղանի սրունքները հատում է M և N կետերում և տրոհում է սեղանը երկու նման սեղանների: Գտե՛ք $|MN|$ -ը:

- 204*. Մեղանի անկյունագիծը տրոհում է այն երկու նման եռանկյունների: Ապացուցե՛ք, որ այդ անկյունագծի քառակուսին հավասար է հիմքերի արտադրյալին:
- 205*. ABCD ուղղանկյունից կտրելով անջատեցին ամենամեծ հնարավոր քառակուսին: Արդյունքում մնաց ուղղանկյուն, որը նման է ABCD-ին: Գտե՛ք ABCD ուղղանկյան մեծ կողմի երկարությունը, եթե նրա փոքր կողմի երկարությունը 2 սմ է:
206. ABCD ուղղանկյունը նման է $A_1B_1C_1D_1$ ուղղանկյանը: Գտե՛ք ABCD ուղղանկյան կողմերի երկարությունները, եթե $S_{ABCD}=60\text{սմ}^2$, $|A_1B_1|=3\text{սմ}$, $|B_1C_1|=5\text{սմ}$:
207. Ապացուցե՛ք, որ նման քառանկյունների պարագծերի հարաբերությունը հավասար է նմանության գործակցին:
208. Ապացուցե՛ք, որ նման քառանկյունների մակերեսների հարաբերությունը հավասար է նմանության գործակցի քառակուսուն:

§ 13. ՆՄԱՆՈՒԹՅԱՆ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

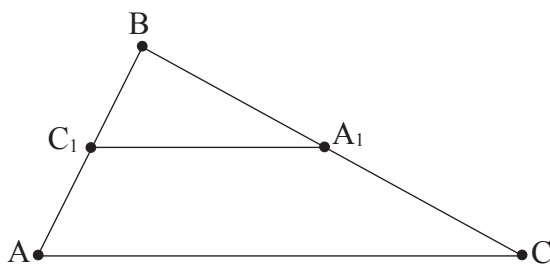
Մինչ այժմ ձևակերպված և ապացուցված շատ պնդումներ նմանության հասկացության հետևանք են, և օգտագործելով նմանության հասկացությունը, կարելի է այդ պնդումները ապացուցել ավելի հեշտ և գեղեցիկ:

Ընդհանրապես երկրաչափական շատ թեորեմներ ապացուցելիս բերվում է նման պատկերների նկատելուն, որն էլ նմանության մեթոդի էությունն է:

Ասվածը հիմնավորենք՝ մեզ հայտնի մի քանի թեորեմներից տալով նոր ապացույցներ:

13.1. Եռանկյան միջին գծի մասին թեորեմը: Մեզ հայտնի է. *եռանկյան երկու կողմերի միջնակետերը միացնող միջին գիծը զուգահեռ է երրորդ կողմին և հավասար է նրա կեսին:*

Ապացուցում: Դիցուք $[A_1C_1]$ -ը ABC եռանկյան $[AB]$ և $[BC]$ կողմերի միջնակետերը միացնող միջին գիծն է (նկ. 13.1): Նկատենք, որ ABC և $C_1B_1A_1$ եռանկյունները նման են ըստ եռանկյունների նմանության երկրորդ հայտանիշի: Իս-



նկ. 13.1

կապես, $\angle ABC = \angle C_1BA_1$ և $\frac{|AB|}{|C_1B|} = \frac{|BA_1|}{|BC|} = 2$:

Հետևաբար՝ $\angle BAC = \angle BC_1A_1$, որտեղից հետևում է, որ C_1A_1 -ը գուգահեռ է AC -ին և $\frac{|AC|}{|C_1A_1|} = 2$, կամ $|C_1A_1| = \frac{|AC|}{2}$:

Ապացույցն ավարտված է:

13.2. Ուղղանկյուն եռանկյունների նմանության հայտանիշը

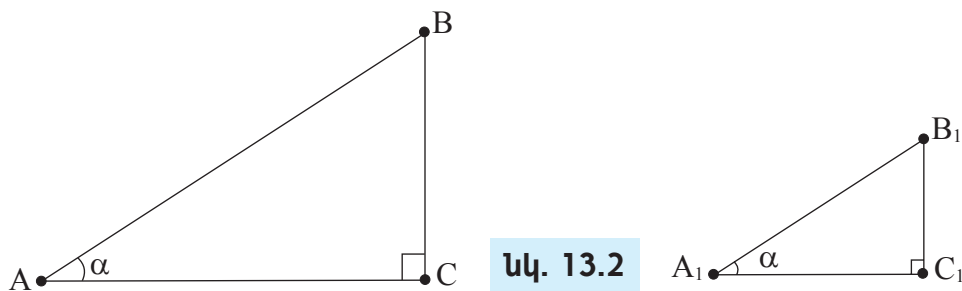
Ուղղանկյուն եռանկյունների համար նմանության առաջին հայտանիշը կարելի է ձևակերպել հետևյալ կերպ:

Թեորեմ 13.1: Եթե մի ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյունը հավասար է մյուս ուղղանկյուն եռանկյան սուր անկյանը, ապա այդ եռանկյունները նման են:

Ապացույցը հետևում է եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշից, քանի որ բացի այդ հավասար անկյուններից ուղղանկյուն եռանկյունները ունեն իրար հավասար ուղիղ անկյուններ:

Նախորդ դասարանի դասընթացից մեզ հայտնի է. **սուր անկյան կոսինուսը կախված է միայն այդ անկյան մեծությունից**: Այս պնդումը ապացուցենք այլ եղանակով՝ օգտվելով ուղղանկյուն եռանկյունների նմանության հայտանիշից:

Դիցուք տրված են ABC և $A_1B_1C_1$ ուղղանկյուն եռանկյուններ, որոնց համար $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$ և $\angle A = \angle A_1 = \alpha$ (նկ. 13.2):



Նկ. 13.2

Ըստ Թեորեմ 13.1-ի $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, քանի որ $\angle A = \angle A_1 = \alpha$: Հետևաբար՝

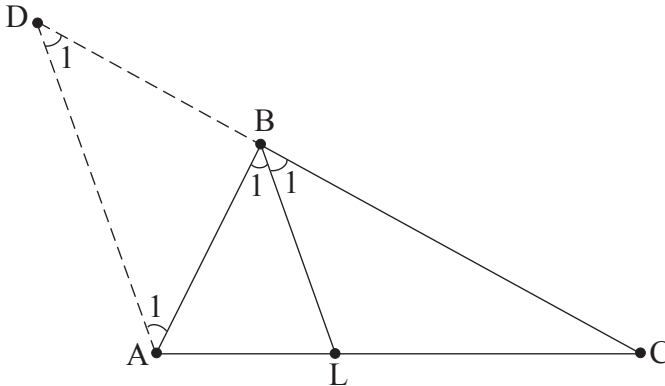
$$\frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|AC|}{|A_1C_1|} \text{ կամ } \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|A_1C_1|}{|A_1B_1|}:$$

Վերջին հարաբերությունը α անկյան կոսինուսն է: Ապացույցն ավարտված է:

13.3. Եռանկյան կիսորդի հատկությունը: Այժմ ապացուցենք եռանկյան կիսորդի վերաբերյալ մի հատկություն:

Թեորեմ 13.2: Եռանկյան անկյան կիսորդը հանդիպակաց կողմը տրոհում է այդ անկյանը կից կողմերին համեմատական մասերի:

Ապացույց: Դիցուք տրված է ABC եռանկյունը, և $[BL]$ -ը նրա կիսորդն է (նկ. 13.3):



նկ. 13.3

Ապացուցենք, որ $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AL|}{|LC|}$:

Կատարենք օժանդակ կառուցում: A կետից տանենք $[BL]$ կիսորդին զուգահեռ ուղիղ, որի հատման կետը BC ուղղի հետ նշանակենք D -ով (նկ. 13.3): DBA եռանկյունը հավասարասրուն է, քանի որ $\angle BDA = \angle CBL$ (որպես համապատասխան անկյուններ) և $\angle DAB = \angle ABL$ (որպես խաչադիր անկյուններ): Այսինքն $\angle BDA = \angle DAB$, որտեղից հետևում է, որ $|DB| = |AB|$:

Մյուս կողմից, Թեորեմ 9.1-ից հետևում է, որ DA և BL զուգահեռ ուղիղները C գագաթով անկյան կողմերից հատում են համեմատական հատվածներ: Այսինքն՝ $\frac{|DB|}{|AL|} = \frac{|BC|}{|LC|}$: Հաշվի առնելով $|DB| = |AB|$, ստանում ենք այն, ինչ պետք էր ապացուցել: Թեորեմն ապացուցված է:

Տեղի ունի նաև Թեորեմ 13.2-ի հակադարձ թեորեմ, տես խնդիր 214:

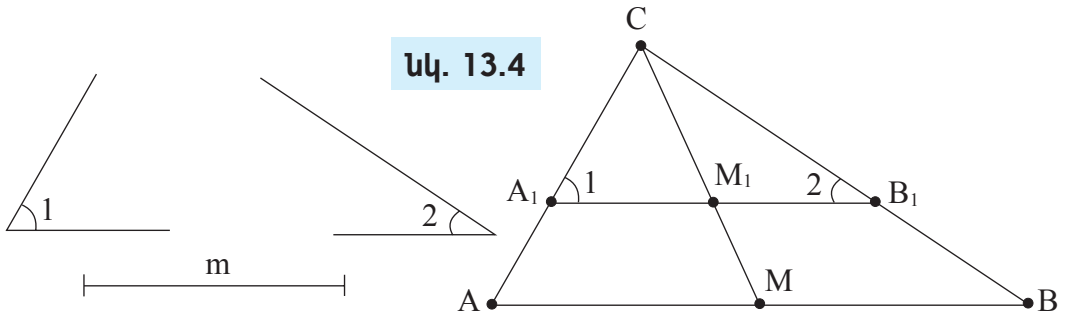
13.4. Կառուցման խնդիրներ: Կառուցման շատ խնդիրներ լուծելիս օգտագործում են այսպես կոչված նմանության մեթոդը, որի էությունը հետևյալն է: Նախ կառուցվում է որոնելի պատկերին նման որևէ պատկեր, այնուհետև, օգտվելով այդ պատկերից, կառուցվում է որոնելի պատկերը: Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը:

Խնդիր: Կառուցել եռանկյուն՝ ըստ երկու անկյունների և երրորդ անկյան գագաթից տարված միջնագծի:

Լուծում: Դիցուք հարթության վրա տրված են երկու անկյուններ՝ 1 և 2, ինչպես նաև m երկարությամբ հատված:

Կառուցենք ABC եռանկյունը, որի երկու անկյունները հավասար են տրված անկյուններին, իսկ երրորդ անկյան գագաթից տարված միջնագիծը՝ տրված հատվածին՝ m -ին:

Քայլ 1: Վերցնենք որևէ $[A_1B_1]$ հատված: Սկսած A_1B_1 ճառագայթից՝ տեղադրենք առաջին անկյանը հավասար անկյուն, իսկ B_1A_1 ճառագայթից՝ երկրորդ անկյանը հավասար անկյուն, որոնց կողմերի հատման կետը նշանակենք C -ով (նկ. 13.4):



Համաձայն եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշի՝ A_1CB_1 եռանկյունը նման է որոնելի եռանկյանը:

Քայլ 2: Կառուցենք A_1CB եռանկյան $[CM_1]$ միջնագիծը:

Քայլ 3: CM_1 ճառագայթի վրա C կետից տեղադրենք տրված հատվածին հավասար $[CM]$ հատվածը:

Քայլ 4: M կետից տանենք A_1B_1 ուղղին զուգահեռ ուղիղ, որի հատման կետերը CA_1 և CB_1 ճառագայթների հետ նշանակենք համապատասխանաբար A -ով և B -ով:

Ապացուցենք, որ ABC եռանկյունը որոնելին է:

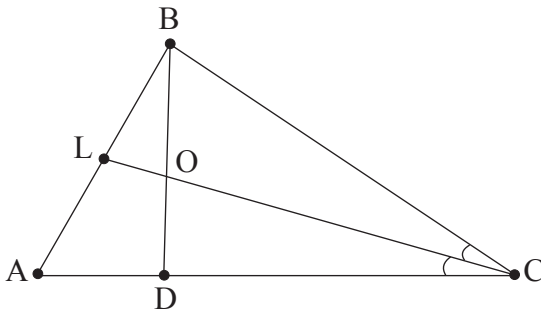
Իրոք, $AB \parallel A_1B_1$ -ին, ուրեմն $\angle A = \angle A_1$ և $\angle B = \angle B_1$, այսինքն ABC եռանկյան երկու անկյունները հավասար են տրված անկյուններին: Մնում է ապացուցել, որ $[CM]$ -ը ACB եռանկյան միջնագիծն է: Նկատենք, որ $\triangle A_1CM_1 \sim \triangle ACM$ և $\triangle M_1CB_1 \sim \triangle MCB$: Հետևաբար՝

$\frac{|A_1M_1|}{|AM|} = \frac{|C_1M_1|}{|CM|}$ և $\frac{|C_1M_1|}{|CM|} = \frac{|M_1B_1|}{|MB|}$, որտեղից հետևում է $\frac{|A_1M_1|}{|AM|} = \frac{|M_1B_1|}{|MB|}$ կամ $|AM| = |MB|$, քանի որ $|A_1M_1| = |M_1B_1|$ ըստ կառուցման: Այսինքն $[CM]$ -ը, որը հավասար էր տրված հատվածին, ABC եռանկյան միջնագիծն է: Կառուցումն ավարտված է:

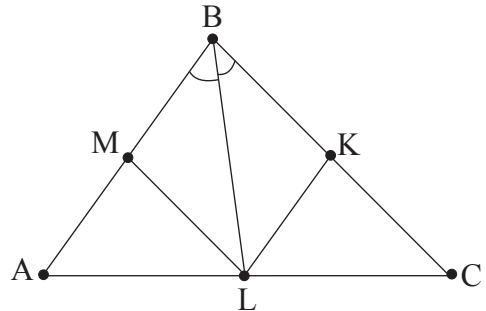
Առաջադրանքներ և խնդիրներ

209. $[CH]$ -ը C ուղիղ անկյունով ABC ուղղանկյուն եռանկյան բարձրությունն է: Ապացուցենք, որ ACH և CBH եռանկյունները նման են:
210. $[CH]$ -ը C ուղիղ անկյունով ABC ուղղանկյուն եռանկյան բարձրությունն է: Ապացուցենք, որ ACH և ABC եռանկյունները նման են:

211. [BH]-ը B ուղիղ անկյան գագաթով ABC ուղղանկյուն եռանկյան բարձրությունն է: Գտե՛ք $|AH|$ -ը, եթե $|AB|=3$ սմ, $|AC|=5$ սմ:
212. Ուղղանկյուն եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից տարված բարձրությունը ներքնաձիգը տրոհում է երկու հատվածների, որոնցից մեկը 10 սմ-ով մեծ է մյուսից: Գտե՛ք ներքնաձիգի երկարությունը, եթե էջերը հարաբերում են, ինչպես 5:4:
213. Ուղղանկյուն եռանկյան էջերը հարաբերում են, ինչպես 3:4, իսկ ներքնաձիգին տարված բարձրության երկարությունը 10 սմ է: Գտե՛ք, թե ինչ երկարությամբ հատվածների է տրոհվում ներքնաձիգը նրան տարված բարձրությամբ:
214. ABC եռանկյան $|BC|$ կողմի վրա գտնվող L կետը $[BC]$ հատվածը տրոհում է $[AB]$, $[BC]$ կողմերին համեմատական մասերի, այսինքն՝ $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|BL|}{|LC|}$: Ապացուցե՛ք, որ $[AL]$ -ը եռանկյան կիսորդն է:
215. $[BD]$ -ին ABC եռանկյան կիսորդն է, O-ն՝ կիսորդների հատման կետը: Գտե՛ք $\frac{|BO|}{|OD|}$, եթե $|AB|=7$ սմ, $|BC|=6$ սմ, $|AC|=5$ սմ:
216. $[CL]$ -ը ABC եռանկյան կիսորդն է, D կետը $[AC]$ կողմը տրոհում է $\frac{|AD|}{|DC|} = \frac{1}{4}$ հարաբերությամբ, O-ն $[CL]$ և $[BD]$ հատվածների հատման կետն է (նկ. 13.5): Գտե՛ք $\frac{|BO|}{|OD|}$ -ն, եթե $\frac{|BL|}{|LA|} = \frac{4}{3}$:



Նկ. 13.5



Նկ. 13.6

217. $[AL]$ -ը և $[CK]$ -ն $[AC]$ հիմքով ABC հավասարասրուն եռանկյան կիսորդներն են: Գտե՛ք $|LK|$ -ն, եթե $|AC|=4$ սմ, $|AB|=7$ սմ:
218. $[BL]$ -ը ABC եռանկյան կիսորդն է: L կետից տարված են զուգահեռ ուղիղներ $[AB]$ և $[BC]$ կողմերին, որոնք հատում են համապատասխանաբար $[BC]$ և $[AB]$ կողմերը K և M կետերում (նկ. 13.6): Գտե՛ք BKLM զուգահեռագծի պարագիծը, եթե $|AB|=6$ սմ, $|BC|=12$ սմ:

219. Կառուցե՛ք եռանկյուն տրված երկու անկյուններով և երրորդ անկյան կիսորդով:
220. Կառուցե՛ք ABC եռանկյունը, եթե տրված են $\angle A$, $|AM|$ միջնագիծը, և հայտնի է, որ $|AB|:|AC|=2:3$:
221. Կառուցե՛ք ուղղանկյուն եռանկյուն ներքնաձիգով և էջերի հարաբերությամբ:
222. Տրված է ABC եռանկյունը: Կառուցե՛ք քառակուսի, որի երկու գագաթները գտնվեն $[AC]$ կողմի վրա և մեկական գագաթներ գտնվեն $[AB]$ և $[BC]$ կողմերի վրա:

§ 14. ՈՒՂԻՂՆԵՐԻ ԵՎ ՇՐՋԱՆԱԳԾԻ ՀԱՏՈՒՄԻՉ ԱՌԱՋԱՅԱՏ ՀԱՏՎԱԾՆԵՐԻ ՀԱՄԱՄԱՏԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Երկրաչափական շատ խնդիրներ լուծելիս հաճախ ստացվում են հետևյալ պատկերները. շրջանագիծ և նրա հատվող լարեր, շրջանագիծ և նրան հատող ուղիղներ, որոնց հատման կետն ընկած է շրջանագծից դուրս: Երկու դեպքում էլ առաջանում են նման եռանկյուններ: Դիտարկենք այս դեպքերը առանձին-առանձին:

14.1. Հատվող լարերի հատկությունը

Թեորեմ 14.1:

Դիցուք A կետը պատկանում է O կենտրոնով և R շառավիղով շրջանագծի ներքին տիրույթին, և $[BB_1]$ -ը այդ շրջանագծի լար է, որն անցնում է A կետով, ապա

$$|BA| \cdot |AB_1| = R^2 - a^2,$$

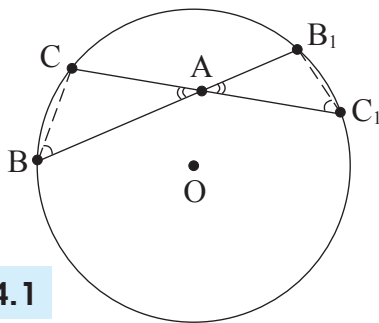
որտեղ a -ն A կետի հեռավորությունն է O կենտրոնից:

Ապացուցում: Դիցուք $[CC_1]$ -ը այդ շրջանագծի մեկ այլ լար է, որը նույնպես անցնում է A կետով (նկ. 14.1): Դիտարկենք ABC և AC_1B_1 եռանկյունները: Ունենք $\triangle ABC \sim \triangle AC_1B_1$, ըստ եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշի, քանի որ $\angle B = \angle C_1$ (որպես նույն CB_1 աղեղին հենված անկյուններ) և $\angle BAC = \angle C_1AB$ (որպես հակադիր անկյուններ):

$$\text{Հետևաբար՝ } \frac{|BA|}{|AC_1|} = \frac{|CA|}{|AB_1|},$$

$$\text{կամ } |BA| \cdot |AB_1| = |CA| \cdot |AC_1|:$$

Նկ. 14.1



Այսպիսով ապացուցեցինք, որ շրջանագծի ներքին տիրույթին պատկանող A կետով անցնող բոլոր լարերը այդ կետով տրոհվում են մասերի,

որոնց արտադրյալը հաստատուն է: Այժմ դիտարկենք այն լարը, որն անցնում է A կետով և կենտրոնով (նկ. 14.2):

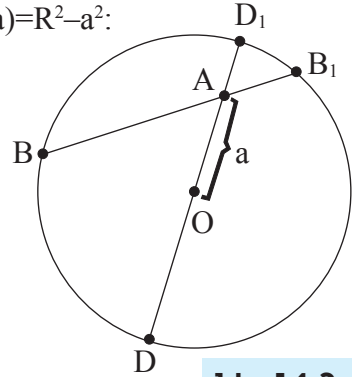
$$\text{Կատանանք՝ } |BA| \cdot |AB_1| = |DA| \cdot |AD_1| = (R+a)(R-a) = R^2 - a^2:$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Որպես հետևանք ձևակերպենք պնդումը, որը ստացվեց նախորդ ապացույցի ընթացքում (այն նաև հետևում է Թեորեմ 14.1-ից):

Հետևանք: Եթե տրված շրջանագծի երկու՝ $[CC_1]$ և $[BB_1]$ լարեր հատվում են A կետում, ապա

$$|BA| \cdot |AB_1| = |CA| \cdot |AC_1|:$$



նկ. 14.2

14.2. Շրջանագծի հատողի հատկությունը

Թեորեմ 14.2:

Դիցուք A կետը գտնվում է O կենտրոնով և R շառավիղով շրջանագծից դուրս, և A կետով անցնող ուղիղը այդ շրջանագիծը հատում է B և B₁ կետերում (նկ. 14.3), ապա

$$|AB| \cdot |AB_1| = a^2 - R^2,$$

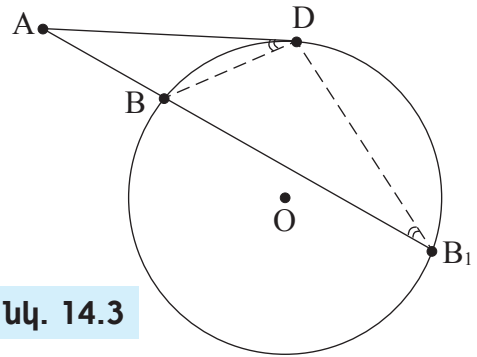
որտեղ a-ն A կետի հեռավորությունն է O կենտրոնից:

Ապացուցում: A կետից տանենք այդ շրջանագծին [AD] շոշափող:

Դիտարկենք ADB և AB₁D եռանկյունները: Ունենք $\triangle ADB \sim \triangle AB_1D$, ըստ եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշի, քանի որ $\angle A$ -ն ընդհանուր է երկուսի համար և $\angle ADB = \angle AB_1D$, քանզի երկուսի մեծությունն էլ հավասար է BD աղեղի կեսին:

$$\text{Հետևաբար՝ } \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{|AD|}{|AB_1|},$$

$$\text{կամ } |AB| \cdot |AB_1| = |AD|^2:$$



նկ. 14.3

Մյուս կողմից, եթե դիտարկենք ADO ուղղանկյուն եռանկյունը, ապա կստանանք՝ $|AD|^2 = |AO|^2 - |OD|^2 = a^2 - R^2$:

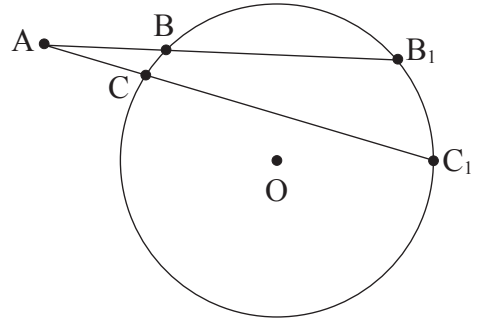
$$\text{Այսպիսով՝ } |AB| \cdot |AB_1| = a^2 - R^2:$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Որպես Թեորեմ 14.2-ի հետևանք ձևակերպենք հետևյալ երկու պնդումները:

Հետևանք 1: Դիցուք շրջանագծից դուրս գտնվող A կետով անցնող ուղիղը այդ շրջանագիծը հատում է B և B₁ կետերում, ապա $|AB| \cdot |AB_1|$ -ը հավասար է A կետից այդ շրջանագծին տարված շոշափողի քառակուսուն:

Հետևանք 2: Դիցուք շրջանագծից դուրս գտնվող A կետով անցնող երկու ուղիղներից մեկը այդ շրջանագիծը հատում է B և B_1 կետերում, իսկ մյուսը՝ C և C_1 կետերում (նկ. 14.4), ապա $|AB| \cdot |AB_1| = |AC| \cdot |AC_1|$:



Նկ. 14.4

Իսկապես, քանի որ այս երկու արտադրյալներն էլ հավասար են A կետից տարվող շոշափողի քառակուսուն:

Առաջադրանքներ և խնդիրներ

223. D կետը պատկանում է O կենտրոնով և 2 սմ շառավիղով շրջանագծի $[AB]$ լարին: Գտե՛ք D կետի հեռավորությունը շրջանագծի կենտրոնից, եթե $|AD|=2$ սմ, $|DB|=1$ սմ:
224. Շրջանագծի $[AB]$ և $[CD]$ լարերը հատվում են K կետում: Հայտնի է, որ $|AK|=2$ սմ, $|KB|=3$ սմ, $|CK|=4$ սմ: Գտե՛ք $|CD|$ -ն:
225. Շրջանագծի $[AB]$ և $[CD]$ լարերը հատվում են K կետում, ընդ որում $|AB|=7$ սմ, $|CD|=5$ սմ: Ի՞նչ հարաբերությամբ է K կետը տրոհում $[AB]$ լարը, եթե այն $[CD]$ -ն տրոհում է $2:3$ հարաբերությամբ:
226. O կենտրոնով շրջանագծի $[AB]$ և $[CD]$ լարերը հատվում են K կետում: Գտե՛ք $\angle OKD$ -ն, եթե $|AK|=4$ սմ, $|KB|=1$ սմ, $|CK|=2$ սմ:
227. Դիցուք O -ն $ABCD$ քառանկյան անկյունագծերի հատման կետն է: Հնարավո՞ր է արդյոք այդ քառանկյանը արտագծել շրջանագիծ, եթե $|AO|=2$ սմ, $|OC|=5$ սմ, $|BO|=3$ սմ, $|OD|=4$ սմ:
228. Դիցուք O -ն $ABCD$ քառանկյան անկյունագծերի հատման կետն է: Ապացուցե՛ք, որ $ABCD$ քառանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ, եթե $|AO| \cdot |CO| = |BO| \cdot |DO|$:
229. O կենտրոնով և 2 սմ շառավիղով շրջանագծից դուրս գտնվող A կետով անցնող ուղիղը այդ շրջանագիծը հատում է B և C կետերում: Գտե՛ք $|AO|$ -ն, եթե $|AB|=3$ սմ, $|AC|=4$ սմ:
230. O կենտրոնով շրջանագծից դուրս գտնվող A կետով անցնող ուղիղը այն հատում է B և C կետերում: Գտե՛ք այդ շրջանագծի շառավիղը, եթե $|AB|=3$ սմ, $|AC|=7$ սմ, $|AO|=5$ սմ:
231. Շրջանագծից դուրս գտնվող A կետով անցնող ուղիղը այդ շրջանագիծը հատում է B և C կետերում: Գտե՛ք $|AB|$ -ն, եթե $|AC|=5$ սմ, և A կետից այդ շրջանագծին տարված շոշափողի երկարությունը 4 սմ է:

232. Որքա՞ն հեռու կարելի է տեսնել 300մ բարձրության աշտարակի տանիքից (հայտնի է, որ երկրագնդի շառավիղը 6370կմ է):
233. Շրջանագիծը, որն անցնում է ABC եռանկյան $[AB]$ և $[BC]$ կողմերի միջնակետերով և B գագաթով, շոշափում է $[AC]$ կողմը: Գտե՛ք $|AC|$ -ն, եթե $|AB|=3$ սմ, $|BC|=5$ սմ:
234. Երկու շրջանագծեր հատվում են A և B կետերում: Դիցուք M-ը AB ուղղի որևէ կետ է, որը չի պատկանում $[AB]$ հատվածին: Ապացուցե՛ք, որ M կետից այդ շրջանագծերին տարված շոշափողները հավասար են:
235. Շրջանագծից դուրս տրված է A կետը: Դիցուք B-ն այդ շրջանագծի այն կետն է, որն ամենամոտն է A-ին, իսկ C-ն այն կետն է, որն ամենահեռուն է A-ից: Գտե՛ք A կետից այդ շրջանագծին տարված շոշափողի երկարությունը, եթե $|AB|=2$ սմ, $|AC|=8$ սմ:
236. Շրջանագիծը, որն անցնում է ABC եռանկյան B, C գագաթներով և $[AB]$ կողմի միջնակետով, հատում է $[AC]$ կողմը D կետում: Գտե՛ք $|AD|$ -ն և $|DC|$ -ն, եթե $|AB|=2$ սմ, $|AC|=4$ սմ:
237. A գագաթով անկյան կողմերից մեկի վրա տրված են B և B_1 կետեր, իսկ մյուս կողմի վրա՝ C և C_1 կետեր: Հնարավո՞ր է արդյոք BB_1C_1C քառանկյանը արտագծել շրջանագիծ, եթե $|AB|=2$ սմ, $|AB_1|=7$ սմ, $|AC|=3$ սմ, $|AC_1|=5$ սմ:
238. A գագաթով անկյան կողմերից մեկի վրա տրված են B և C կետերը, իսկ $[AB]$ և $[AC]$ հատվածների վրա՝ համապատասխանաբար՝ B_1 և C_1 կետերը: Ապացուցե՛ք, որ BB_1C_1C քառանկյանը կարելի է արտագծել շրջանագիծ, եթե $|AB| \cdot |AB_1| = |AC| \cdot |AC_1|$:
239. Նկ. 14.4-ում ապացուցե՛ք, որ ABC_1 և ACB_1 եռանկյունները նման են:
240. Նկ. 14.4-ում հայտնի է, որ $|AC|=2$ սմ, $|AB|=3$ սմ, $|BC_1|=4$ սմ: Գտե՛ք $|CB_1|$ -ը:

§ 15. ԱՌՆՋՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՌԱՆԿՅԱՆ ԿՈՂՄԵՐԻ ԵՎ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԻՋԵՎ

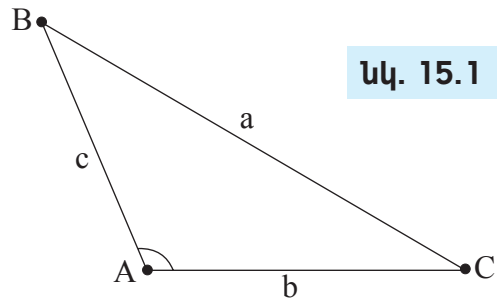
Նախորդ դասարանից մենք գիտենք որոշ առնչություններ ուղղանկյուն եռանկյան կողմերի և անկյունների միջև, որոնք մենք ապացուցեցինք եռանկյունաչափական հասկացությունների օգնությամբ: Այժմ ապացուցենք որոշ առնչություններ կամայական եռանկյան կողմերի և անկյունների միջև:

15.1. Կոսինուսների թեորեմը

Թեորեմ 15.1: (Կոսինուսների թեորեմ): Եռանկյան կողմի քառակուսին հավասար է մյուս երկու կողմերի քառակուսիների գումարից հանած այդ կողմերի և սրանցով կազմված անկյան կոսինուսի կրկնապատիկ արտադրյալը:

Այսինքն՝ դիցուք ABC -ն եռանկյուն է, որի կողմերի երկարություններն են՝ $|AB|=c$, $|BC|=a$, $|AC|=b$ (նկ. 15.1), ապա $a^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot b \cdot \cos A$:

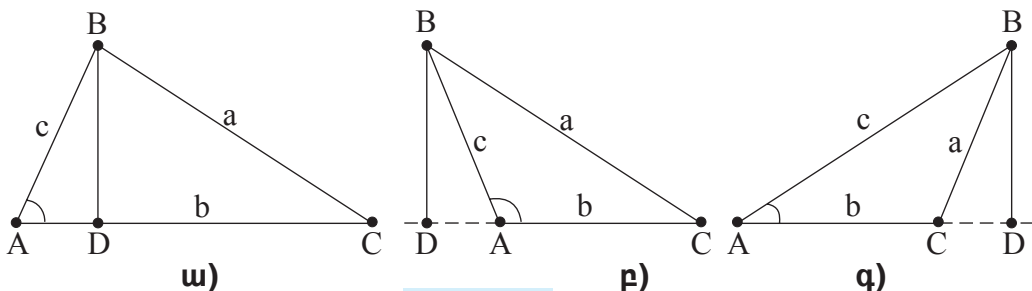
Ապացուցում: Երբ $\angle A = 90^\circ$, համաձայն Պյութագորասի թեորեմի $a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot b \cdot \cos A$: Երբ $\angle A \neq 90^\circ$, տանենք ABC եռանկյան $[BD]$ բարձրությունը: Հնարավոր են նկ. 15.2-ում պատկերված դեպքերը:



նկ. 15.1

Նկ. 15.2 ա) և գ) դեպքերում, օգտվելով ABD ուղղանկյուն եռանկյան կողմի և անկյան միջև առնչությունից, ունենք՝

$$|BD| = c \cdot \sin \angle A:$$



նկ. 15.2

Այս հավասարությունը ճիշտ է նաև 15.2 բ) դեպքում, քանի որ, օգտվելով բերման բանաձևից, ունենք՝

$$|BD| = c \cdot \sin(180^\circ - \angle A) = c \cdot \sin \angle A:$$

Ունենք նաև

ա) դեպքում $|CD|=|AC|-|AD|=b-c\cdot\cos\angle A$,

բ) դեպքում $|CD|=|AC|+|AD|=b+c\cdot\cos(180^\circ-\angle A)=b-c\cdot\cos\angle A$,

գ) դեպքում $|CD|=|AD|-|AC|=c\cdot\cos\angle A-b$:

Նկատենք, որ բոլոր երեք դեպքերում $|CD|^2=(b-c\cdot\cos\angle A)^2$:

Համաձայն Պյութագորասի թեորեմի՝ բոլոր երեք դեպքերում ունենք $|BC|^2=|BD|^2+|CD|^2$

կամ

$$\begin{aligned}a^2 &= c^2 \sin^2 \angle A + (b - c \cdot \cos \angle A)^2 = c^2 \sin^2 \angle A + b^2 + c^2 \cos^2 \angle A - 2b \cdot c \cdot \cos \angle A = \\ &= c^2 (\sin^2 \angle A + \cos^2 \angle A) + b^2 - 2b \cdot c \cdot \cos \angle A = c^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \angle A:\end{aligned}$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Հետևանք: Դիցուք տրված է ABC եռանկյունը, որի կողմերի երկարություններն են $|AB|=c$, $|BC|=a$, $|AC|=b$ (նկ. 15.1), ապա

ա) $\angle A$ -ն սուր է, եթե $c^2+b^2-a^2>0$,

բ) $\angle A$ -ն բութ է, եթե $c^2+b^2-a^2<0$,

գ) $\angle A$ -ն ուղիղ է, եթե $c^2+b^2-a^2=0$:

Ապացուցում: Կոսինուսների թեորեմից հետևում է՝

$$\cos \angle A = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2ab}:$$

Եթե $c^2+b^2-a^2>0$, ապա $\cos \angle A > 0$, հետևաբար $\angle A < 90^\circ$:

Եթե $c^2+b^2-a^2<0$, ապա $\cos \angle A < 0$, հետևաբար $\angle A > 90^\circ$:

Եթե $c^2+b^2-a^2=0$, ապա $\cos \angle A = 0$, հետևաբար $\angle A = 90^\circ$:

Պարզ է, որ համապատասխան պնդումը ճիշտ է նաև մյուս անկյունների համար: Հետևանքն ապացուցված է:

15.2. Սինուսների թեորեմը:

Թեորեմ 15.2: (Սինուսների թեորեմը): Կամայական ABC եռանկյան համար, որի կողմերի երկարություններն են $|AB|=c$, $|AC|=b$, $|BC|=a$, տեղի ունի

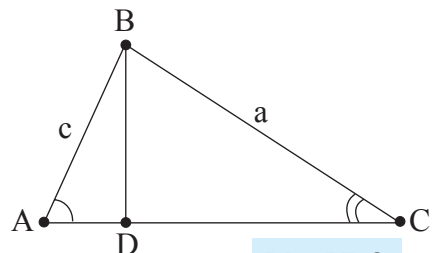
$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C} = 2R,$$

որտեղ R -ը այդ եռանկյանը արտագծյալ շրջանագծի շառավիղն է:

Ապացուցում: Տանենք ABC եռանկյան $[BD]$ բարձրությունը (նկ. 15.3): Անկախ նրանից՝ A գագաթի անկյունն ինչպիսին է (տե՛ս նկ. 15.2 ա) և բ) դեպքերը), ABD ուղղանկյուն եռանկյունուց ունենք՝

$$|BD|=c \cdot \sin \angle A:$$

Նկատենք, որ այս հավասարությունը



նկ. 15.3

ճիշտ է նաև, եթե $\angle A = 90^\circ$, քանի որ այդ դեպքում ստանում ենք՝

$$c = |BD| = c \cdot \sin 90^\circ = c:$$

Նույն կերպ BDC ուղղանկյուն եռանկյունուց ունենք՝

$$|BD| = a \cdot \sin \angle C:$$

Հետևաբար՝

$$c \cdot \sin \angle A = c \cdot \sin \angle C \quad \text{կամ} \quad \frac{a}{\sin \angle A} = \frac{c}{\sin \angle C}:$$

Նման ձևով, տանելով A գագաթից բարձրություն, կստանանք՝

$$\frac{c}{\sin \angle C} = \frac{b}{\sin \angle B}:$$

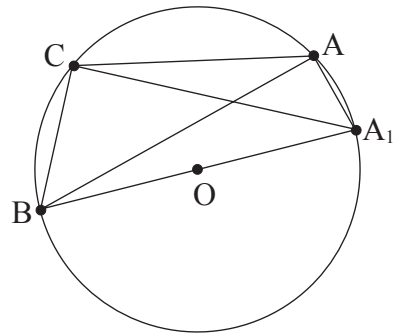
Այժմ ապացուցենք, որ այդ հարաբերությունները հավասար են $2R$:

Դիցուք ABC եռանկյան փոքր անկյունը $\angle A$ -ն է: Արտագծենք ABC եռանկյանը շրջանագիծ և տանենք $[BA_1]$ տրամագիծը (նկ. 15.4): Նկատենք, որ $\angle BCA_1 = 90^\circ$ և $\angle BAC = \angle BA_1C$: Հետևաբար BCA_1 ուղղանկյուն եռանկյունուց ունենք՝

$$\sin \angle BA_1C = \frac{a}{2R}, \quad \text{կամ} \quad \frac{a}{\sin \angle BAC} = 2R:$$

$$\text{Այսպիսով,} \quad \frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C} = 2R:$$

Թեորեմն ապացուցված է:



Նկ. 15.4

15.3. Եռանկյունների լուծում: Լուծել եռանկյունը նշանակում է եռանկյան մի քանի հայտնի տարրերի օգնությամբ որոշել նրա մյուս տարրերը:

Դիցուք տրված է ABC եռանկյունը, որի կողմերի երկարություններն են $|AB|=c$, $|AC|=b$ և $|BC|=a$: Հնարավոր են հետևյալ խնդիրները:

Խնդիր 1: Տրված են եռանկյան մի կողմը և երկու անկյունները: Գտնել մյուս երկու կողմերը և երրորդ անկյունը:

Լուծում: Դիցուք տրված է $\angle B$ -ն, $\angle C$ -ն և a -ն: Նախ $\angle A = 180^\circ - \angle B - \angle C$ բանաձևով կգտնենք երրորդ անկյունը, իսկ այնուհետև սինուսների թեորեմի օգնությամբ գտնում ենք՝

$$b = \frac{a}{\sin \angle A} \cdot \sin \angle B \quad \text{և} \quad c = \frac{a}{\sin \angle A} \cdot \sin \angle C:$$

Խնդիր 2: Տրված են a -ն, c -ն և $\angle B$ -ն: Գտնել b -ն, $\angle A$ -ն և $\angle C$ -ն:

Լուծում: Օգտվելով կոսինուսների թեորեմից՝ ունենք՝

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos \angle B}:$$

Դարձյալ օգտվելով կոսինուսների թեորեմից՝ ունենք՝

$$\cos \angle A = \frac{\sqrt{b^2 + c^2 - a^2}}{2bc},$$

որտեղից կորոշենք $\angle A$ -ն, իսկ $\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B$:

Խնդիր 3: Տրված են a -ն, b -ն և c -ն: Գտնել $\angle A$ -ն, $\angle B$ -ն, $\angle C$ -ն:

Լուծել ինքնուրույն (տե՛ս նախորդ խնդրի լուծումը):

Առաջադրանքներ և խնդիրներ

241. ABC եռանկյան մեջ $\angle A = 120^\circ$: Գտնք $|BC|$ -ն, եթե $|AB| = 3$ սմ, $|AC| = 2$ սմ:
242. Գտնք ABC եռանկյան A գագաթի անկյան մեծությունը, եթե $|AB| = 2$ սմ, $|AC| = 1$ սմ, $|BC| = \sqrt{7}$ սմ:
243. Ինչպիսի՞ն է եռանկյունը (սուրանկյուն, ուղղանկյուն, բութանկյուն), եթե նրա կողմերը հավասար են՝ ա) 5, 6, 8, բ) 5, 6, 7, գ) $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{10}$:
244. ABC եռանկյան մեջ հայտնի է՝ $|AB| = 8$ սմ, $|BC| = 10$ սմ, $|AC| = 9$ սմ: Գտնք $|BM|$ միջնագծի երկարությունը:
245. ABC եռանկյան $[AB]$ կողմի վրա տրված է D կետը այնպես, որ $|AD| = 3|BD|$: Գտնք $|DC|$ -ն, եթե $|AB| = 8$ սմ, $|BC| = 10$ սմ, $|AC| = 12$ սմ:
246. ABC եռանկյան $[AB]$ կողմի վրա տրված է D կետը այնպես, որ $|AD| = 3|BD|$, իսկ $[AC]$ կողմի վրա՝ M կետը այնպես, որ $|AC| = 2|MC|$: Գտնք $|DM|$ -ը, եթե $|AB| = 8$ սմ, $|BC| = 10$ սմ, $|AC| = 12$ սմ:
247. Ապացուցե՛ք, որ գուգահեռագծի անկյունագծերի քառակուսիների գումարը հավասար է բոլոր կողմերի քառակուսիների գումարին:
248. Դիցուք ABC եռանկյան կողմերի երկարություններն են $|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BC| = a$: $[AM]$ -ը ABC եռանկյան a երկարությամբ կողմին տարված միջնագիծն է: Ապացուցե՛ք, որ $|AM|^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$:
249. ABC եռանկյան մեջ հայտնի է՝ $\angle A = 60^\circ$, $\angle C = 45^\circ$: Գտնք $\frac{|AB|}{|BC|}$ -ն:
250. ABC եռանկյան մեջ հայտնի է՝ $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 75^\circ$: Գտնք $\frac{|AB|}{|BC|}$ -ն:
251. ABC սուրանկյուն եռանկյան մեջ հայտնի է՝ $\angle A = 60^\circ$, $|BC| = \sqrt{3}$ սմ, $|AC| = \sqrt{2}$ սմ: Գտնք $\angle B$ -ն:
252. Գտնք ABC եռանկյան $|AB|$ կողմի երկարությունը, եթե $|AC| = 7$ սմ, $\angle A = 75^\circ$, $\angle C = 60^\circ$:

253. Եռանկյան կողմերից մեկի երկարությունը 3սմ է, նրան առընթեր անկյունների մեծությունները՝ 60° , և 75° : Գտե՛ք այդ եռանկյանը արտագծած շրջանագծի շառավիղը:
254. Գտե՛ք ABC եռանկյանը արտագծյալ շրջանագծի շառավիղը, եթե $|AB|=10$ սմ, $|BC|=8$ սմ, $|AC|=6$ սմ:
255. Երկու շրջանագծերի ընդհանուր լարը այդ շրջանագծերի կենտրոններից երկուսն է համապատասխանաբար α և β անկյունների տակ: Գտե՛ք այդ շրջանագծերի շառավիղները, եթե նրանց կենտրոնների հեռավորությունը a է:
256. ABC եռանկյան մեջ հայտնի է՝ $\angle A=60^\circ$, $|AB|=6$ սմ, $|BC|=8$ սմ: Գտե՛ք $|AC|$ -ն:
257. ABC եռանկյան մեջ հայտնի է՝ $\angle A=60^\circ$, $|AB|=8$ սմ, $|BC|=7$ սմ: Գտե՛ք $|AC|$ -ն: Քանի՞ լուծում ունի խնդիրը:
258. Տրված է ABC եռանկյուն: Տրված տարրերի օգնությամբ գտե՛ք այդ եռանկյան մյուս տարրերը.
 ա) $|BC|=5$ սմ, $\angle A=45^\circ$, $\angle B=60^\circ$:
 բ) $\angle A=60^\circ$, $|BC|=9$ սմ, $|AC|=6$ սմ,
 գ) $|AB|=6$ սմ, $|AC|=8$ սմ, $|BC|=10$ սմ:
259. ABC եռանկյան համար, որի կողմերի երկարություններն են՝ $|AB|=c$, $|AC|=b$, $|BC|=a$, հայտնի են $(a+b)$ -ն, $\angle A$ և $\angle B$: Գտե՛ք a -ն, b -ն, c -ն:

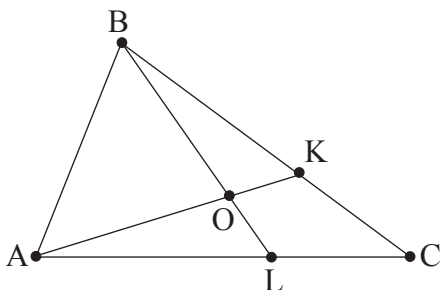
Գլուխ 2-ի կրկնության հարցեր

- Հատվածների ո՞ր գույգերն են կոչվում համեմատական:
- Ձևակերպե՛ք համեմատական հատվածների մասին թեորեմը:
- Մահմանե՛ք երկու եռանկյունների նմանությունը:
- Ո՞րն է կոչվում երկու եռանկյունների նմանության գործակից:
- Ինչպե՞ս կարելի է կառուցել նման եռանկյուններ:
- Ո՞րն է եռանկյունների նմանության առաջին հայտանիշը:
- Ո՞րն է եռանկյունների նմանության երկրորդ հայտանիշը:
- Ո՞րն է եռանկյունների նմանության երրորդ հայտանիշը:
- Ինչպե՞ս են հարաբերում նման եռանկյունների պարագծերը:
- Ինչպե՞ս են հարաբերում նման եռանկյունների համապատասխան կողմերին տարված բարձրությունները:
- Ինչպե՞ս են հարաբերում նման եռանկյունների համապատասխան կողմերին տարված միջնագծերը:
- Ինչպե՞ս են հարաբերում նման եռանկյունների մակերեսները:
- Ե՞րբ ենք ասում, որ երկու պատկերների միջև հաստատված է փոխմիարժեք համապատասխանություն:

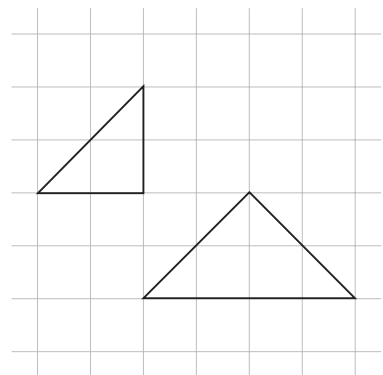
15. Ինչպիսի՞ փոխմիարժեք համապատասխանություն կարելի է սահմանել երկու նման եռանկյունների միջև:
16. Սահմանե՞ք երկու պատկերների նմանությունը:
17. Ձևակերպե՞ք ուղղանկյուն եռանկյունների նմանության որևէ հայտանիշ:
18. Ձևակերպե՞ք անկյան կիսորդի մասին թեորեմը:
19. Ձևակերպե՞ք հատվող լարերի հատկությունը:
20. Ձևակերպե՞ք շրջանագիծը հատողի հատկությունը:
21. Ձևակերպե՞ք կոսինուսների թեորեմը:
22. Ձևակերպե՞ք սինուսների թեորեմը:
23. Ի՞նչ ենք հասկանում՝ ասելով լուծել եռանկյունը:

Գլուխ 2-ի լրացուցիչ խնդիրներ

260. ABC եռանկյան [AB] և [BC] կողմերի վրա համապատասխանաբար տրված են M և N կետերը, ընդ որում MN-ը զուգահեռ է AC-ին: Գտե՛ք |NC|-ն, եթե |MB|=2սմ, |MA|=4սմ, |BC|=15սմ:
261. ABC եռանկյան [AB] և [BC] կողմերի վրա համապատասխանաբար տրված են M և N կետեր: Ապացուցե՛ք, որ MN-ը զուգահեռ է AC-ին, եթե |MB|=3սմ, |MA|=5սմ, |BN|=6սմ, |NC|=10սմ:
262. Տրոհե՛ք տրված [AB] հատվածը 4:5 հարաբերությամբ:
263. Անկյան ներսում տրված է M կետ: Կառուցե՛ք M կետով անցնող ուղիղ այնպես, որ այդ ուղղի այն հատվածը, որն ընկած է անկյան ներքին տիրույթում, M կետով տրոհվի 1:2 հարաբերությամբ:
- 264.* ABC եռանկյան [AC] և [BC] կողմերի վրա տրված են համապատասխանաբար L և K կետերը այնպես, որ $|AL|:|LC|=4:3$, $|BK|:|KC|=3:2$ (նկ. 1.2.1): Գտե՛ք $|BO|:|OL|$ հարաբերությունը, որտեղ O-ն [AK] և [BL] հատվածների հատման կետն է:
265. Ապացուցե՛ք, որ նկ.1.2.2-ում պատկերված եռանկյունները նման են, և գտե՛ք նմանության գործակիցը:



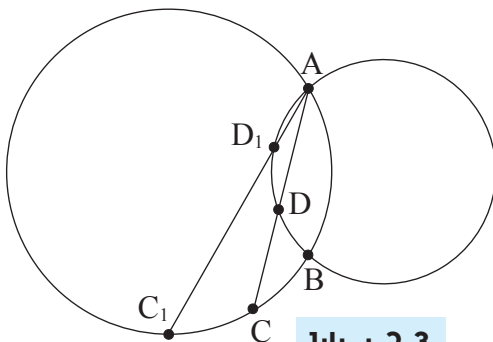
նկ. 1.2.1



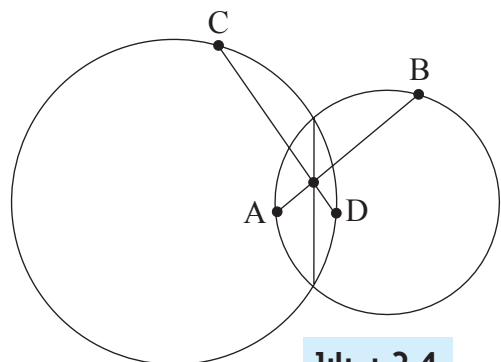
նկ. 1.2.2

266. Երկու եռանկյուններ նման են, ընդ որում նրանից մեկի կողմերի երկարություններն են 3սմ, 14սմ, 12սմ: Գտե՛ք մյուս եռանկյան կողմերի երկարությունները, եթե նրանցից փոքրի երկարությունը 4սմ է:
267. 4սմ, 6սմ, 8սմ, 9սմ, 12սմ երկարությամբ հատվածներից կառուցեցին երկու նման եռանկյուններ: Գտե՛ք այդ եռանկյունների նմանության գործակիցը:
268. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ նմանության $k_1 = \frac{1}{3}$ գործակցով, $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$ նմանության $k_2 = \frac{2}{3}$ գործակցով: Գտե՛ք ABC և $A_2B_2C_2$ եռանկյունների նմանության գործակիցը:
269. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ և $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$: Ապացուցե՛ք, որ ABC և $A_2B_2C_2$ եռանկյունները նման են:
270. Սեղանի անկյունագծերից մեկը անկյունագծերի հատման կետով տրոհվում է 2սմ և 5սմ երկարությամբ հատվածների: Գտե՛ք սեղանի փոքր հիմքի երկարությունը, եթե նրա մեծ հիմքի երկարությունը 7սմ է:
271. $[BC]$ և $[AD]$ հիմքերով սեղանի սրունքների շարունակությունները հատվում են O կետում: Գտե՛ք $|OB|$ -ն, եթե $|BC|=4$ սմ, $|AD|=7$ սմ, $|AB|=5$ սմ:
272. ABC եռանկյան $[AB]$ և $[BC]$ կողմերի վրա համապատասխանաբար տրված են M և N կետերը, ընդ որում MN -ը զուգահեռ չէ AC -ին: Հայտնի է, որ ABC և MBN եռանկյունները նման են: Գտե՛ք $|BM|$ -ը, եթե $|BN|=5$ սմ, $|NC|=2$ սմ, $|MA|=3$ սմ:
273. Ո՞ր եռանկյունները կարելի է տրոհել երկու նման եռանկյունների:
274. Ուղեփակոցի կարճ հատվածի երկարությունը 1մ է, իսկ երկար հատվածինը՝ 3,5մ: Հորիզոնական դիրքից որքա՞ն կբարձրանա երկար հատվածի ծայրը, եթե կարճ հատվածի ծայրը իջեցվի 0,75մ-ով:
275. $ABCD$ ուղղանկյունը նման է $A_1B_1C_1D_1$ ուղղանկյանը: Գտե՛ք S_{ABCD} -ն, եթե $ABCD$ ուղանկյան փոքր կողմի երկարությունը 2սմ է, իսկ $A_1B_1C_1D_1$ ուղղանկյան կից կողմերի երկարություններն են 3սմ և 5սմ:
276. Սեղանի հիմքերի երկարություններն են a և b : Հիմքերին զուգահեռ ուղիղը սեղանի սրունքները հատում է M ու N կետերում և անցնում է անկյունագծերի հատման կետով: Գտե՛ք $|MN|$ -ը:
277. $[BM]$ -ը ABC եռանկյան միջնագիծն է: $[AC]$ կողմին զուգահեռ ուղիղը հատում է $[AB]$ և $[BC]$ կողմերը համապատասխանաբար K և N կետերում: Ապացուցե՛ք, որ $[BM]$ -ը կիսում է $[KN]$ հատվածը:

278. Եռանկյան բոլոր անկյունները տարբեր են, իսկ նրանցից մեկի մեծությունը 40° է: Այդ անկյան կիսորդը եռանկյունը տրոհում է երկու եռանկյունների, որոնցից մեկը նման է սկզբնական եռանկյանը: Գտե՛ք սկզբնական եռանկյան անկյունները:
279. Երկու շրջանագծեր հատվում են A և B կետերում: Դիցուք A կետով անցնող g ուղիղը այդ շրջանագծերը հատում է D և C կետերում, իսկ նույն A կետով անցնող g_1 ուղիղը՝ D և C կետերում (նկ. 1.2.3): Ապացուցե՛ք, որ BDC և BD_1C_1 եռանկյունները նման են:
280. Եռանկյան կողմերի երկարություններն են 8 սմ, 12 սմ և 15 սմ: Շրջանագիծը, որի կենտրոնը գտնվում է մեծ կողմի վրա, շոշափում է այդ եռանկյան մյուս երկու կողմերը: Ի՞նչ մասերի է տրոհում շրջանագծի կենտրոնը եռանկյան մեծ կողմը:
281. Հավասարասրուն եռանկյանը ներգծյալ շրջանագծի շառավիղը հարաբերում է նրա գագաթից տարված բարձրությանը այնպես, ինչպես $2:7$: Գտե՛ք այդ եռանկյան կողմերի երկարությունները, եթե նրա պարագիծը 56 սմ է:
282. Երկու շրջանագծեր հատվում են A և B կետերում: Առաջին շրջանագծի $[AC]$ լարը շոշափում է երկրորդ շրջանագիծը, իսկ երկրորդ շրջանագծի $[AD]$ լարը շոշափում է առաջին շրջանագիծը: Գտե՛ք $|AB|$ -ն, եթե $|CB|=a$, $|BD|=b$:
283. $[AL]$ -ը ABC եռանկյան կիսորդն է: Ապացուցե՛ք, որ $|AL|^2=|AB|\cdot|AC|-|BL|\cdot|LC|$:
284. Երկու հատվող շրջանագծերի ընդհանուր լարին պատկանող O կետով տարված են երկու ուղիղներ: Առաջին ուղիղը շրջանագծերից մեկը հատում է A և B կետերում, իսկ երկրորդ ուղիղը մյուս շրջանագիծը հատում է C և D կետերում (նկ. 1.2.4): Ապացուցե՛ք, որ A, B, C, D կետերը գտնվում են մի շրջանագծի վրա:



Նկ. 1.2.3



Նկ. 1.2.4

285. $|BL|$ -ը ABC եռանկյան կիսորդն է, ընդ որում $|AL|=a$, $|LC|=b$ ($a < b$); ABC եռանկյանը արտագծյալ շրջանագծի շոշափողը, որն անցնում է B կետով, հատում է AC ուղիղը D կետում: Գտե՛ք $|AD|$ -ն:
286. Տրված է անկյան և նրա ներքին տիրույթին պատկանող A կետ: Կառուցե՛ք շրջանագիծ, որը շոշափում է այդ անկյան կողմերը և անցնում A կետով:
287. Կառուցե՛ք եռանկյուն ըստ երկու անկյունների և միջնագծերի գումարի:
288. ABCD քառանկյան համար հայտնի է, որ $|AB|=|CD|=a$, $\angle BAD=\angle BCD=\alpha < 90^\circ$, $|BC|\neq |AD|$: Գտե՛ք այդ քառանկյան պարագիծը:
289. $[AC]$ հիմքով ABC հավասարասրուն եռանկյան հիմքի վրա տրված է որևէ D կետ: Ապացուցե՛ք, որ ABD և CBD եռանկյուններին արտագծած շրջանագծերի շառավիղները հավասար են:
290. ABC եռանկյան $[AB]$ կողմի վրա տրված է D կետը: Գտե՛ք ADC և DBC եռանկյուններին արտագծած շրջանագծերի շառավիղների հարաբերությունը, եթե $|BC|=6$ սմ, $|AC|=4$ սմ:
- 291.* ABCD քառանկյանը արտագծած է շրջանագիծ: Գտե՛ք $|AD|$ -ն, եթե $\angle BAC=30^\circ$, $\angle ABD=45^\circ$, $|BC|=3$ սմ:
292. Կոորդինատային հարթության վրա տրված են երեք կետեր. A (1, 0), B (0, 1), C (0, 2): Գտե՛ք ABC եռանկյանը արտագծած շրջանագծի շառավիղը:
293. ABC եռանկյան կողմերի երկարություններն են. $|AB|=6$ սմ, $|AC|=4$ սմ, $|BC|=8$ սմ: Գտե՛ք շրջանագծի շառավիղը, որն անցնում է B, C կետերով և $[AB]$ կողմի միջնակետով:
294. Հայտնի են ABC եռանկյան P պարագիծը, $\angle A$ -ն և $\angle B$ -ն: Գտե՛ք այդ եռանկյան կողմերի երկարությունները:
- 295*. Դիցուք M-ը սեղանի սրունքների շարունակությունների հատման կետն է, իսկ O-ն՝ նրա անկյունագծերի հատման կետը: Ապացուցե՛ք, որ MO-ն կիսում է սեղանի հիմքերը:
296. Սեղանի անկյունագիծը այն տրոհում է երկու նման եռանկյունների: Գտե՛ք այդ սեղանի հիմքերի հարաբերությունը, եթե սրունքների հարաբերությունը 2 է:

Այս գլխի նպատակն է ընդլայնել սովորողների պատկերացումները երկրաչափության կիրառական նշանակության մասին՝ խորացնելով գիտելիքները երկրաչափական մեծությունների չափման և տարբեր եղանակներով հաշվման վերաբերյալ: Չեւսվորել և զարգացնել հմտություններ տարածական պատկերներին վերաբերող մեծություններ հաշվելու համար: Ինտուիտիվ պատկերացումներ տալ հաջորդականության սահմանի մասին, ցուցադրել դրա կիրառությունը շրջանագծի և շրջանի հետ կապված մեծություններ հաշվելիս: Շրջանագծի երկարության և մակերեսի չափումները բացահայտում են գիտության մեջ ամենակարևոր հաստատուններից մեկը՝ π թիվը: Զարմանալիորեն π -ն առաջանում է նաև շատ ուրիշ խնդիրներ լուծելու ընթացքում (խնդիրներ, որոնք առաջին հայացքից թվում են շատ հեռու մաթեմատիկայից): Այս փաստը գալիս է հաստատելու գիտության ամբողջականությունը և կապակցվածությունը:

§ 16. ՉԱՓՈՂԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔՆԵՐ

Երկրաչափության պնդումները և մեթոդները, մասնավորապես նմանության մեթոդը, եռանկյունաչափության բանաձևերը, լայնորեն կիրառվում են տեղանքում չափողական աշխատանքներ կատարելիս:

16.1. Չափումներ տեղանքում: Ակնհայտ է, որ միշտ չէ, որ հնարավոր է անմիջականորեն չափել երկու կետերի հեռավորությունը տեղանքում: Օրինակ, եթե դուք գտնվում եք գետի մի ափին և ձեզ անհրաժեշտ է չափել մյուս ափին գտնվող երկու կետերի (օբյեկտների) հեռավորությունը, որևէ ծառի կամ սյան բարձրությունը և այլն:

A կետը անվանենք հասանելի (կամ անհասանելի), եթե չափողը կարող է (չի կարող) գտնվել այդ կետում:

Համարենք, որ անմիջապես կարող ենք չափել երկու կետերի հեռավորությունը, եթե երկուսն էլ հասանելի են:

Հնարավոր են հետևյալ դեպքերը (ձևակերպենք որպես խնդիրներ):

Խնդիր 1: Որոշել հասանելի A կետի հեռավորությունը անհասանելի B կետից (նկ. 16.1):

Լուծում: Ընտրենք մեկ ուրիշ հասանելի կետ՝ C, և չափենք $|AC|$ հեռավորությունը: Անկյունաչափի օգնությամբ հաշվենք նաև BAC և BCA անկյունների մեծությունները:

Այսպիսով, խնդիրը բերվեց հետևյալին. հայտնի են ABC եռանկյան $|AC|$ կողմի երկարությունը և անկյուններ A-ն և C-ն, որոշել $|AB|$ կողմի երկարությունը:

Օգտվելով սինուսների թեորեմից՝ ունենք՝

$$\frac{|AB|}{\sin \angle C} = \frac{|AC|}{\sin \angle B} \text{ կամ } \frac{|AB|}{\sin \angle C} = \frac{|AC|}{\sin(180^\circ - \angle A - \angle C)},$$

$$\text{որտեղից } |AB| = \frac{|AC| \cdot \sin \angle C}{\sin(\angle A + \angle C)}:$$

Խնդիրը լուծված է:

Խնդիր 2: Որոշել երկու անհասանելի A և B կետերի հեռավորությունը (սկ. 16.2):

Լուծում: Ընտրենք երկու հասանելի C և D կետեր, որոնցից A և B կետերը տեսանելի են:

Չափենք $|CD|$ հեռավորությունը, ACD, ADC, BCD և CDB անկյունների մեծությունները: Նախ որոշենք $|AC|$ և $|CB|$ հեռավորությունները: Նախորդ խնդրի օգնությամբ (դիտարկենք ACD եռանկյունը), $|CD|$ -ի և անկյուններ ACD և CDA-ի միջոցով ունենք՝

$$|AC| = \frac{|CD| \cdot \sin \angle CDA}{\sin(\angle ACD + \angle CDA)}:$$

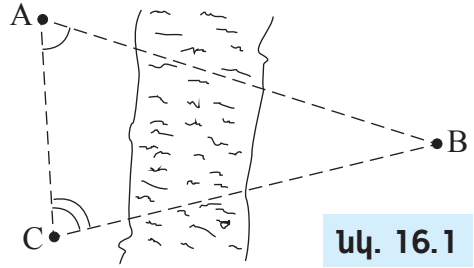
Նման ձևով CDB եռանկյունուց $|CD|$ -ի և անկյուններ BCD-ի և CDB-ի միջոցով ունենք՝

$$|CB| = \frac{|CD| \cdot \sin \angle CDB}{\sin(\angle BCD + \angle CDB)}:$$

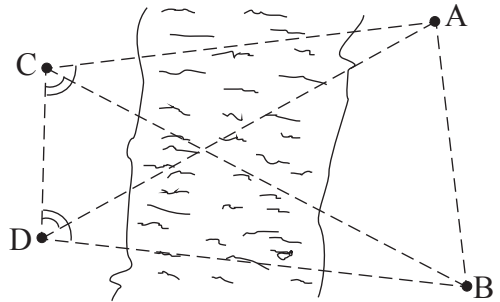
Այժմ դիտարկենք ACB եռանկյունը: Գիտենք այդ եռանկյան $|CA|$ և $|CB|$ կողմերը, ինչպես նաև $\angle ACB = \angle ACD - \angle BCD$ անկյունը: Օգտվելով կոսինուսների թեորեմից՝ ունենք՝

$$|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |CB|^2 - 2|AC| \cdot |CB| \cdot \cos \angle ACB}:$$

Խնդիրը լուծված է:



սկ. 16.1



սկ. 16.2

Խնդիր 3: Որոշել առարկայի բարձրությունը, որի հիմքը հասանելի է (նկ. 16.3):

Լուծում: Դիցուք տրված է AB սյունը: Որոշենք նրա բարձրությունը: Հարթության վրա ընտրենք C կետ և չափենք BC հեռավորությունը: Չափենք նաև ACB անկյան մեծությունը: ABC ուղղանկյուն եռանկյունուց ունենք՝

$$\operatorname{tg} \angle C = \frac{|AB|}{|BC|}, \text{ հետևաբար } |AB| = |BC| \cdot \operatorname{tg} \angle C:$$

Խնդիրը լուծված է:

Խնդիր 4: Որոշել ուղղահայաց առարկայի բարձրությունը, որի հիմքը անհասանելի է (նկ. 16.4):

Լուծում: Առարկայի հիմքով անցնող որևէ ուղղի վրա ընտրենք երկու հասանելի՝ C և D կետեր:

Չափենք $|CD|$ հեռավորությունը, ACB և ADB անկյունները: ABD ուղղանկյուն եռանկյունուց ունենք՝

$$|AB| = |BD| \cdot \operatorname{tg} \angle D$$

$$\text{կամ } |BD| = |AB| \cdot \operatorname{ctg} \angle D:$$

ABC ուղղանկյուն եռանկյունուց ունենք՝

$$|AB| = |BC| \cdot \operatorname{tg} \angle C \text{ կամ } |BC| = |AB| \cdot \operatorname{ctg} \angle C:$$

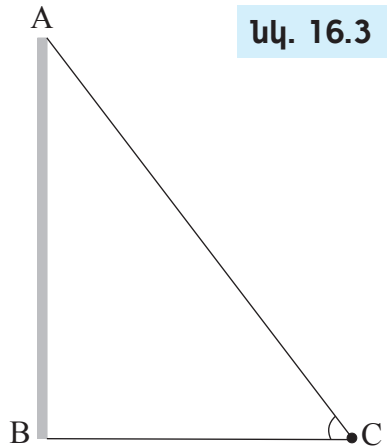
Ունենք նաև, որ $|BD| - |BC| = |CD|$: Հետևաբար՝

$$|AB| \cdot \operatorname{ctg} \angle D - |AB| \cdot \operatorname{ctg} \angle C = |CD|,$$

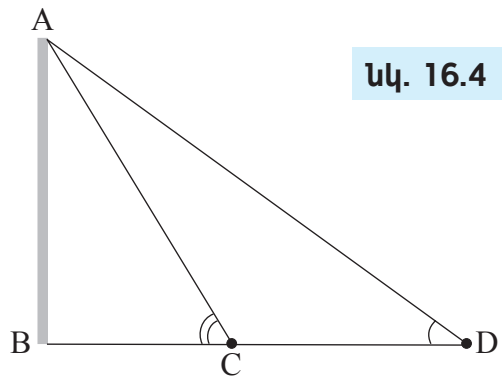
որտեղից՝

$$|AB| = \frac{|CD|}{\operatorname{ctg} \angle D - \operatorname{ctg} \angle C}:$$

Խնդիրը լուծված է:



Նկ. 16.3



Նկ. 16.4

Առաջադրանքներ և խնդիրներ

297. Որոշել հասանելի A կետի հեռավորությունը անհասանելի B կետից, եթե մեկ այլ հասանելի C կետի համար տեղի ունի $|AC|=5$ մ, $\angle BAC=30^\circ$, $\angle BCA=90^\circ$:
298. Որոշել գետի այն ափին գտնվող երկու՝ A և B կետերի հեռավորությունը, եթե գետի այս ափին գտնվող C և D կետերի համար տեղի ունի $|CD|=10$ մ, $\angle ACD=60^\circ$, $\angle BCD=30^\circ$, $\angle CDA=30^\circ$, $\angle CDB=60^\circ$:

299. Որոշել ծառի բարձրությունը, եթե դուք գտնվում եք ծառից 10մ հեռավորության վրա, ծառի գագաթը երևում է 45° -ի անկյան տակ և ձեր հասակն է 1,7մ:
300. Ծառի գագաթը ձեզ երևում է 30° -ի անկյան տակ: 2մ ծառին ավելի մոտ կանգնելիս նրա գագաթը ձեզ կերևա 60° -ի անկյան տակ: Որոշել ծառի բարձրությունը, եթե ձեր հասակն է 1,7մ:
301. Երբ կանգնած եք աշտարակից 100մ հեռավորության վրա, նրա գագաթը ձեզ երևում է 45° -ի անկյան տակ, իսկ երբ կանգնած եք աշտարակից 50մ հեռավորության վրա, ապա նրա գագաթը երևում է 60° -ի անկյան տակ: Որոշել աշտարակի բարձրությունը, եթե ձեր հասակն է 1,7մ:

§ 17. ԵՌԱՆԿՅԱՆ ՄԱԿԵՐԵՍԻ ԿԱԿՎԱՄԱՆ ԱՅԼ ԲԱՆԱՁՆԵՐ

Եռանկյունաչափական մեծությունների օգնությամբ դուրս են բերվում եռանկյան մակերեսի հաշվման տարբեր բանաձևեր:

17.1. Եռանկյան մակերեսի հաշվման բանաձևեր

Թեորեմ 17.1:

Եռանկյան մակերեսը հավասար է նրա երկու կողմերի և նրանցով կազմված անկյան սինուսի արտադրյալի կեսին:

Այսինքն՝ դիցուք տրված է ABC եռանկյունը (նկ. 17.1): Տեղի ունի հետևյալ բանաձևը (**բանաձև 1**).

$$S_{ABC} = \frac{|AB| \cdot |AC| \cdot \sin \angle A}{2}:$$

Ապացուցում: Տանենք BD բարձրությունը: ABD ուղղանկյուն եռանկյունուց ունենք՝

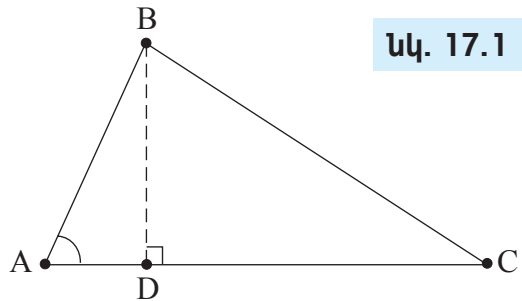
$$|BD| = |AB| \cdot \sin \angle A:$$

Ստացված հավասարությունը ճիշտ է նաև այն դեպքում, երբ $\angle A$ -ն բութ է կամ ուղիղ (ստուգե՛ք ինքնուրույն՝ օգտվելով բերման բանաձևերից): Հետևաբար՝

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |BD| \cdot |AC| = \frac{|AB| \cdot |AC| \cdot \sin \angle A}{2}:$$

Պարզ է, որ եռանկյան մակերեսը կարող ենք արտահայտել ուրիշ երկու կողմերով և նրանցով կազմված անկյան միջոցով: Թեորեմն ապացուցված է:

Ըստ էության, եռանկյան մակերեսի հաշվման ուրիշ բանաձևեր դուրս են բերվում Թեորեմ 17.1-ից:



Նկ. 17.1

Դիցուք տրված է ABC եռանկյունը, որի կողմերի երկարությունները նշանակենք $|AB|=c$, $|AC|=b$ և $|BC|=a$ (նկ. 17.2):

ABC եռանկյան մակերեսի հաշվման համար կան հետևյալ բանաձևերը:

Բանաձև 2.

$$S_{ABC} = \frac{a^2 \cdot \sin \angle B \cdot \sin \angle C}{2 \sin \angle A}:$$

Իսկապես, սինուսների թեորեմից հետևում է՝

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} \quad \text{կամ} \quad b = \frac{a \cdot \sin \angle B}{\sin \angle A}:$$

Համաձայն թեորեմ 17.1-ի՝

$$S_{ABC} = \frac{a \cdot b \cdot \sin \angle C}{2} = \frac{a \cdot a \cdot \sin \angle B \cdot \sin \angle C}{2 \cdot \sin \angle A} = \frac{a^2 \cdot \sin \angle B \cdot \sin \angle C}{2 \cdot \sin \angle A}:$$

Բանաձևն ապացուցված է:

Բանաձև 3.

$$S_{ABC} = 2R^2 \cdot \sin \angle A \cdot \sin \angle B \cdot \sin \angle C,$$

որտեղ R -ը ABC եռանկյանը արտագծած շրջանագծի շառավիղն է: Իսկապես, սինուսների թեորեմից հետևում է՝

$$\frac{a}{\sin \angle A} = 2R \quad \text{կամ} \quad a^2 = 4R^2 \cdot \sin^2 \angle A,$$

որը տեղադրենք բանաձև 2-ի մեջ: Կստանանք՝

$$S_{ABC} = \frac{a^2 \cdot \sin \angle B \cdot \sin \angle C}{2 \cdot \sin \angle A} = \frac{4R^2 \cdot \sin \angle A \cdot \sin \angle B \cdot \sin \angle C}{2 \cdot \sin \angle A} =$$

$$= 2R^2 \cdot \sin \angle A \cdot \sin \angle B \cdot \sin \angle C:$$

Բանաձևն ապացուցված է:

Բանաձև 4.

$$S_{ABC} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R},$$

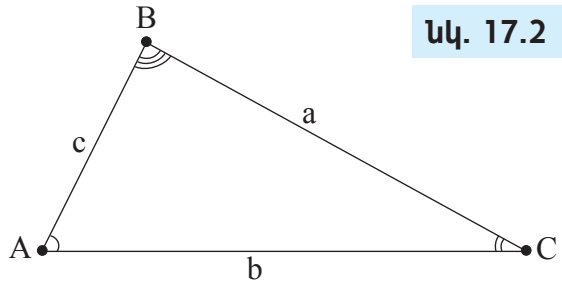
որտեղ R -ը ABC եռանկյանը արտագծած շրջանագծի շառավիղն է: Իսկապես, դարձյալ սինուսների թեորեմից հետևում է՝

$$\frac{c}{\sin \angle C} = 2R \quad \text{կամ} \quad \sin \angle C = \frac{c}{2R},$$

որը տեղադրենք բանաձև 1-ի մեջ: Կստանանք՝

$$S_{ABC} = \frac{a \cdot b \cdot \sin \angle C}{2} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}:$$

Ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:



17.2. Հերոնի բանաձևը: Այսպիսով, մենք դուրս բերեցինք եռանկյան մակերեսի հաշվման մի քանի բանաձևեր: Դուրս բերենք ևս մեկ բանաձև. եռանկյան մակերեսի հաշվումը նրա կողմերի երկարությունների միջոցով: Այս բանաձևն ունի նաև պատմական նշանակություն, քանի որ այն հանդիսանում է երկրաչափության վաղ հայտնի բանաձևերից մեկը և կրում է այն հայտնագործած հույն մաթեմատիկոս Հերոնի (մ.թ.ա. 1-ին դար, Ալեքսանդրիա) անունով:

Թեորեմ 17.2: (Հերոնի բանաձևը): Դիցուք a -ն, b -ն, c -ն ABC եռանկյան կողմերի երկարություններն են: Նրա մակերեսի համար տեղի ունի հետևյալ բանաձևը.

$$S_{ABC} = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)},$$

որտեղ p -ն այդ եռանկյան կիսապարագիծն է, այսինքն՝

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Ապացուցում: Կոսինուսների թեորեմից հետևում է (տե՛ս նկ. 17.2)՝

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \angle C, \text{ որտեղից } \cos \angle C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}:$$

Եռանկյունաչափության հիմնական նույնությունից ունենք՝

$$\sin \angle C = \sqrt{1 - \cos^2 \angle C} = \sqrt{(1 - \cos \angle C) \cdot (1 + \cos \angle C)}:$$

Այժմ առանձին-առանձին հաշվենք $(1 - \cos \angle C)$ և $(1 + \cos \angle C)$ արտահայտությունները: Ունենք՝

$$\begin{aligned} 1 - \cos \angle C &= 1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{c^2 - a^2 - b^2 + 2ab}{2ab} = \frac{c^2 - (a-b)^2}{2ab} = \\ &= \frac{(c-a+b) \cdot (c+a-b)}{2ab} = \frac{2(p-a) \cdot (p-b)}{ab} \end{aligned}$$

$$1 + \cos \angle C = 1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(a+b)^2 - c^2}{2ab} = \frac{(a+b-c) \cdot (a+b+c)}{2ab} = \frac{2p(p-c)}{ab},$$

$$\text{քանի որ } p-a = \frac{a+b+c}{2} - a = \frac{b+c-a}{2}, p-b = \frac{a+b+c}{2} - b = \frac{a+c-b}{2},$$

$$p-c = \frac{a+b+c}{2} - c = \frac{a+b-c}{2}:$$

Հետևաբար՝

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= \frac{a \cdot b \cdot \sin \angle C}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \sqrt{(1 - \cos \angle C) \cdot (1 + \cos \angle C)}}{2} = \\ &= \frac{ab}{2} \cdot \sqrt{\frac{4 \cdot p(p-c) \cdot (p-b) \cdot (p-a)}{a^2 \cdot b^2}} = \sqrt{p(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}: \end{aligned}$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Առաջադրանքներ և խնդիրներ

302. Գտն՞ք եռանկյան մակերեսը, եթե նրա անկյուններից մեկի մեծությունը 120° է, իսկ այդ անկյանն առընթեր կողմերի երկարություններն են 7սմ և 8սմ:
303. Գտն՞ք ուղղանկյուն եռանկյան մակերեսը, որի սուր անկյուններից մեկի մեծությունը 60° է, իսկ ներքնաձիգի երկարությունը՝ 8սմ:
304. Գտն՞ք հավասարասրուն եռանկյան մակերեսը, եթե նրա սրունքների երկարությունը 7սմ է, իսկ նրանց կազմած անկյան մեծությունը հավասար է 150° :
305. ABC եռանկյան մակերեսը հավասար է $\frac{|AB| \cdot |AC|}{2}$: Ապացուցե՛ք, որ $\angle A = 90^\circ$:
306. ABC եռանկյան մեջ հայտնի են $|AC|=b$, $|BC|=a$: $\angle C$ -ի ի՞նչ մեծության դեպքում ABC եռանկյան մակերեսը կլինի ամենամեծը:
307. Ապացուցե՛ք, որ եռանկյան անկյան կիսորդը եռանկյունը տրոհում է երկու եռանկյունների, որոնց մակերեսները հարաբերում են, ինչպես այդ անկյունը կազմող կողմերը:
308. g և g_1 ուղիղները հատվում են A կետում: Դիցուք B-ն և B_1 -ը կամայական երկու կետեր են g ուղղից, իսկ C-ն և C_1 -ը կամայական երկու կետեր են g_1 ուղղից: Ապացուցե՛ք, որ
- $$\frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{|AB_1| \cdot |AC_1|}{|AB| \cdot |AC|}:$$
309. Գտն՞ք ABC եռանկյան մակերեսը, եթե $|AB|=8$ սմ, $\angle B=30^\circ$, $\angle A=45^\circ$:
310. Գտն՞ք եռանկյան մակերեսը, եթե նրա երկու անկյունների մեծություններն են 120° և 30° , իսկ նրան արտագծած շրջանագծի շառավիղը 5սմ է:
311. Գտն՞ք եռանկյան մակերեսը, եթե նրա կողմերի երկարություններն են 10սմ, 13սմ և 15սմ:
312. Գտն՞ք եռանկյան կողմերի երկարությունները, եթե նրանք հարաբերում են, ինչպես 5:9:12, իսկ եռանկյան մակերեսը $16\sqrt{26}$ սմ² է:
313. Գտն՞ք 5սմ, 6սմ և 7սմ երկարությամբ կողմերով եռանկյանը արտագծած շրջանագծի շառավիղը:
314. Ապացուցե՛ք, որ a երկարությամբ կողմով և նրան հանդիպակաց α մեծությամբ անկյուն ունեցող եռանկյուններից ամենամեծ մակերես ունի հավասարասրունը:

§ 18. ՉՈՒԳԱՆԵՐԱԳԾԻ ԵՎ ՔԱՐԱՆԿՅԱՆ ՄԱԿԵՐԵՍՆԵՐԻ ՀԱՇՎՄԱՆ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐ

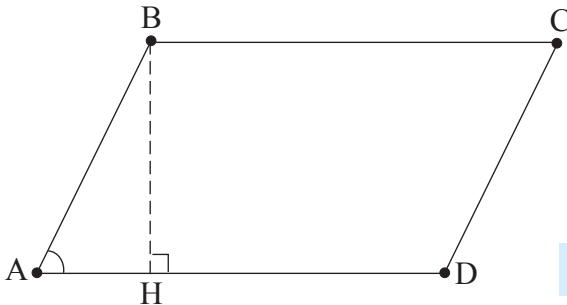
18.1. Զուգահեռագծի մակերեսի հաշվման բանաձև: Նախորդ դասարանից մենք գիտենք, որ զուգահեռագծի մակերեսը հավասար է նրա որևէ կողմի և այդ կողմին տարված բարձրության երկարությունների արտադրյալին:

Այժմ դուրս բերենք զուգահեռագծի մակերեսի հաշվման մեկ այլ բանաձև:

Թեորեմ 18.1: **Զուգահեռագծի մակերեսը հավասար է նրա կից կողմերի և նրանցով կազմված անկյան սինուսի արտադրյալին:**

Այսինքն, տրված ABCD զուգահեռագծի (նկ. 18.1) համար՝

$$S_{ABCD} = |AB| \cdot |AD| \cdot \sin A:$$



Նկ. 18.1

Ապացուցում: Դիցուք $\angle A$ -ն սուր է: Զուգահեռագծի B գագաթից [AD] կողմին տանենք [BH] բարձրություն: Համաձայն մակերեսի բանաձևի՝

$$S_{ABCD} = |AD| \cdot |BH|:$$

Մյուս կողմից, ABH ուղղանկյուն եռանկյունուց ունենք՝

$$|BH| = |AB| \cdot \sin \angle A,$$

որը տեղադրենք մակերեսի արտահայտության մեջ: Կստանանք՝

$$S_{ABCD} = |AD| \cdot |AB| \cdot \sin \angle A:$$

Երբ $\angle A$ -ն բութ է, ապա նախորդ դեպքի համաձայն՝

$$S_{ABCD} = |AB| \cdot |BC| \cdot \sin \angle B = |AB| \cdot |BC| \cdot \sin(180^\circ - \angle A) = |AB| \cdot |AD| \cdot \sin \angle A:$$

Երբ $\angle A$ -ն ուղիղ է, ապա

$$S_{ABCD} = |AB| \cdot |AD| = |AB| \cdot |AD| \cdot \sin 90^\circ = |AB| \cdot |AD| \cdot \sin \angle A:$$

Թեորեմն ապացուցված է:

18.2 Քառանկյան մակերեսի հաշվման բանաձևեր: Քառանկյան կամ ընդհանրապես կամայական բազմանկյան մակերեսը հաշվելու համար կարող ենք այն տրոհել այնպիսի պատկերների, որոնց մակերեսները հաշվել գիտենք, օրինակ եռանկյունների: Պարզ է, որ տրոհումը կարելի է կատարել տարբեր ձևերով և, իհարկե, բազմանկյան մակերեսը չպետք է կախված լինի տրոհման ձևից:

Թեորեմ 18.2:

Ուռուցիկ քառանկյան մակերեսը հավասար է նրա անկյունագծերի և նրանցով կազմված անկյան սինուսի արտադրյալի կեսին:

Այսինքն, տրված ABCD ուռուցիկ քառանկյան համար (նկ. 18.2)

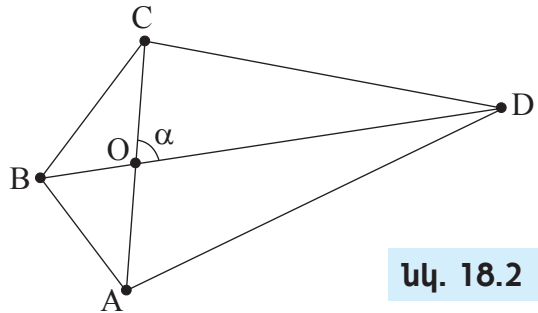
$$S_{ABCD} = \frac{|AC| \cdot |BD| \cdot \sin \alpha}{2},$$

որտեղ α -ն նրա անկյունագծերի կազմած անկյունն է:

Ապացուցում: ABCD ուռուցիկ քառանկյունը անկյունագծերով տրոհվում է չորս եռանկյունների. AOB, BOC, COD և AOD :

Հետևաբար՝

$$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD}:$$



նկ. 18.2

Եռանկյան մակերեսի հաշվման բանաձևի օգնությամբ գրենք դիտարկվող եռանկյունների մակերեսները: Ունենք՝

$$S_{AOB} = \frac{|OA| \cdot |OB| \cdot \sin \alpha}{2},$$

$$S_{BOC} = \frac{|OB| \cdot |OC| \cdot \sin(180^\circ - \alpha)}{2} = \frac{|OB| \cdot |OC| \cdot \sin \alpha}{2},$$

$$S_{COD} = \frac{|OC| \cdot |OD| \cdot \sin \alpha}{2},$$

$$S_{AOD} = \frac{|OA| \cdot |OD| \cdot \sin(180^\circ - \alpha)}{2} = \frac{|OA| \cdot |OD| \cdot \sin \alpha}{2}:$$

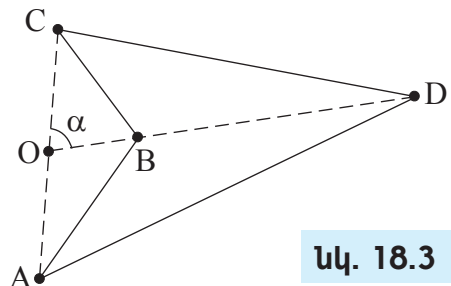
Տեղադրելով այս արտահայտությունները քառանկյան մակերեսի արտահայտության մեջ՝ ստանում ենք.

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= \frac{1}{2} \cdot \sin \alpha \cdot [|OA| \cdot |OB| + |OB| \cdot |OC| + |OC| \cdot |OD| + |OD| \cdot |OA|] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sin \alpha \cdot (|OA| + |OC|) \cdot (|OB| + |OD|) = \frac{1}{2} \cdot \sin \alpha \cdot |AC| \cdot |BD|: \end{aligned}$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Դիտողություն: Նկատենք, որ եթե Թեորեմ 18.2-ի ձևակերպման մեջ α -ն համարենք անկյունագծերը պարունակող ուղիղների կազմած անկյունը, ապա

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin \alpha$$



նկ. 18.3

բանաձևը ճիշտ կլինի նաև ոչ ուռուցիկ քառանկյունների համար (նկ. 18.3), որը առաջարկված է որպես խնդիր: Ապացուցելու համար նկատեք, որ

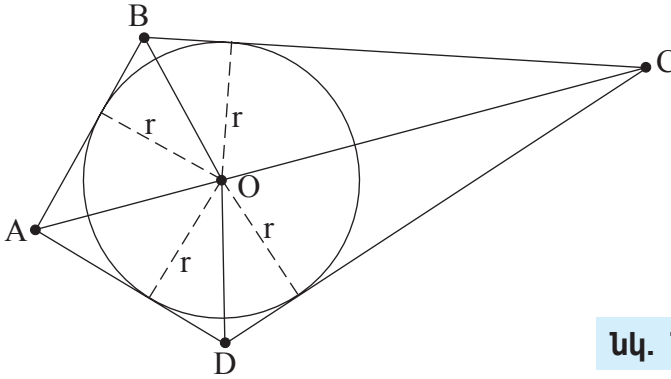
$$S_{ABCD} = S_{AOD} + S_{OCD} - S_{AOB} - S_{OCB}:$$

Հետևանք: Շեղանկյան մակերեսը հավասար է նրա անկյունագծերի արտադրյալի կեսին:

Իսկապես, քանի որ շեղանկյան անկյունագծերի կազմած անկյունը 90° է:

Թեորեմ 18.3: Շրջանագծին արտագծած քառանկյան մակերեսը հավասար է նրա կիսապարագծի և այդ շրջանագծի շառավիղի արտադրյալին:

Ապացուցում: Դիցուք տրված է ABCD քառանկյունը, և O-ն նրան ներգծած շրջանագծի կենտրոնն է, իսկ r-ը՝ շառավիղը (նկ. 18.4): ABCD քառանկյունը տրոհենք AOB, BOC, COD և AOD եռանկյունների:



նկ. 18.4

Նկատենք, որ բոլոր չորս եռանկյունների համար O կետից տարված բարձրությունները հավասար են r-ի:

Ունենք՝

$$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD} = \frac{|OA| \cdot r}{2} + \frac{|BC| \cdot r}{2} + \frac{|CD| \cdot r}{2} + \frac{|AD| \cdot r}{2} =$$

$$= \frac{r \cdot (|AB| + |BC| + |CD| + |AD|)}{2} = r \cdot p, \text{ որտեղ } p\text{-ն } ABCD \text{ քառանկյան}$$

կիսապարագիծն է: Թեորեմն ապացուցված է:

Առաջադրանքներ և խնդիրներ

315. Գտե՛ք 10սմ և 6սմ կողմերով զուգահեռագծի բարձրությունների երկարությունները, եթե նրա մակերեսը 30սմ² է:

316. Գտե՛ք ABCD զուգահեռագծի մակերեսը, եթե $|AB|=5$ սմ, $|AC|=8$ սմ, $\angle BAC=30^\circ$:

317. Զուգահեռագծի կից կողմերի երկարություններն են 7սմ և 5սմ: Գտե՛ք զուգահեռագծի մակերեսը, եթե նրա բութ անկյան մեծությունը 120° է:
318. Գտե՛ք շեղանկյան մակերեսը, եթե նրա կողմի երկարությունը 12սմ է, իսկ սուր անկյունը՝ 45° :
319. Գտե՛ք շեղանկյան մակերեսը, եթե նրա կողմի երկարությունը 5սմ է, իսկ անկյունագծի և կողմի կազմած անկյան մեծությունը՝ 30° :
320. Գտե՛ք զուգահեռագծի կողմի երկարությունը, եթե նրա մյուս կողմի երկարությունը 5սմ է, մակերեսը՝ 10սմ^2 , իսկ անկյուններից մեկը՝ 30° :
321. ABCD զուգահեռագծի A գագաթի անկյան կիսորդը հատում է [BC] կողմը E կետում: Գտե՛ք AECD քառանկյան մակերեսը, եթե $\angle BAD=60^\circ$, $|AB|=3\text{սմ}$, $|BC|=5\text{սմ}$:
322. Ապացուցե՛ք, որ տրված կողմերով զուգահեռագծերից ամենամեծ մակերեսն ունի ուղղանկյունը:
323. Գտե՛ք քառանկյան մակերեսը, եթե նրա անկյունագծերի երկարություններն են 8սմ և 7սմ, իսկ նրանց կազմած անկյան մեծությունը՝ 60° :
324. Գտե՛ք A զուգահեռագծի մակերեսը, եթե նրա անկյունագծերի երկարություններն են 4սմ և 6սմ, իսկ նրանց կազմած անկյունը՝ 30° :
325. O-ն ABCD զուգահեռագծի անկյունագծերի հատման կետն է: Գտե՛ք նրա մակերեսը, եթե $|AO|=6\text{սմ}$, $|OB|=4\text{սմ}$, $\angle BOC=120^\circ$:
326. Ապացուցե՛ք, որ տրված անկյունագծերով քառանկյուններից ամենամեծ մակերեսն ունի այն, որի անկյունագծերը ուղղահայաց են:
327. Ապացուցե՛ք, որ տրված անկյունագծերով զուգահեռագծերից ամենամեծ մակերեսն ունի շեղանկյունը:
328. Ապացուցե՛ք, որ տրված անկյունագծերով ուղղանկյուններից ամենամեծ մակերեսն ունի քառակուսին:
329. [AD] և [BC] հիմքերով հավասարասրուն սեղանի անկյունագծերը փոխուղղահայաց են: Գտե՛ք նրա մակերեսը, եթե $|AD|=10\text{սմ}$, $|BC|=6\text{սմ}$:
330. Ապացուցե՛ք, որ ոչ ուռուցիկ քառանկյան մակերեսը (նկ. 18.3) հավասար է նրա մեծությունների և այդ անկյունագծերը պարունակող ուղիղների կազմած անկյան սինուսի արտադրյալի կեսին:
331. Գտե՛ք ABCD զուգահեռագծի մակերեսը, եթե $|BO|=4\text{սմ}$, $|AD|=6\text{սմ}$, $\angle CBD=60^\circ$, որտեղ O-ն նրա անկյունագծերի հատման կետն է:
332. Գտե՛ք ABCD զուգահեռագծի մակերեսը, եթե [AC] անկյունագծի երկարությունը 8սմ է, և այն A գագաթի անկյունը տրոհում է 30° և 45° մեծության անկյունների:

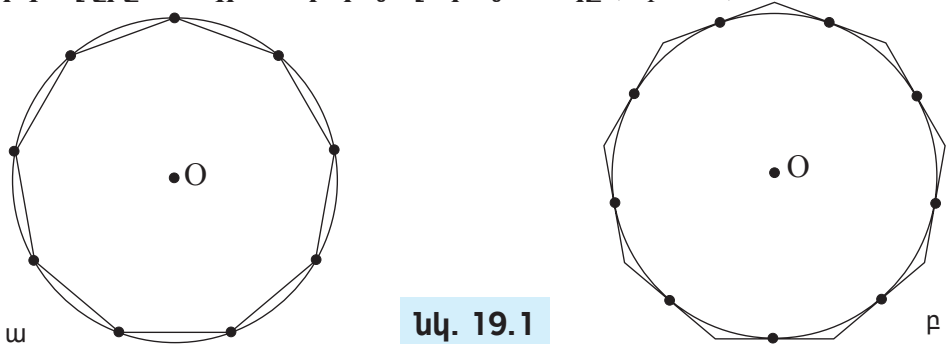
333. Գտե՛ք 2սմ շառավիղով շրջանագծին արտագծած քառանկյան պարագիծը, եթե նրա մակերեսը 10սմ^2 է:
334. Շրջանագծին արտագծած սեղանի սրունքների երկարություններն են $6,5\text{սմ}$ և $7,5\text{սմ}$, իսկ մակերեսը՝ 42սմ^2 : Գտե՛ք սեղանի բարձրությունը:
335. Շրջանագծին արտագծած սեղանի սրունքների երկարություններն են 13սմ և 15սմ , իսկ մակերեսը՝ 158սմ^2 : Գտե՛ք սեղանի հիմքերի երկարությունները:

§ 19. ԿԱՆՈՆԱՎՈՐ ԲԱԶՄԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ

Նախորդ դասարանում մենք արդեն տվել ենք կանոնավոր բազմանկյան սահմանումը և ուսումնասիրել նրա մի շարք հատկություններ: Կանոնավոր բազմանկյունների օգնությամբ սահմանվում և չափվում են շրջանագծի երկարությունը և մակերեսը: Այդ պատճառով այս պարագրաֆում մենք կխորացնենք գիտելիքները կանոնավոր բազմանկյունների մասին՝ ուսումնասիրելով նրա մի քանի ուրիշ հատկություններ: Սկզբում հիշեցնենք հիմնական դրույթները:

19.1. Կանոնավոր բազմանկյուններ: Ուռուցիկ բազմանկյունը կոչվում է **կանոնավոր**, եթե նրա բոլոր կողմերը հավասար են, հավասար են նաև բոլոր անկյունները:

Մենք պարզել ենք, որ (Թեորեմ 1.2, Երկրաչափություն 8) կանոնավոր n -անկյան յուրաքանչյուր անկյան աստիճանային մեծությունը հավասար է $180^\circ \cdot \frac{(n-2)}{n}$: Մենք պարզել ենք նաև, որ ցանկացած կանոնավոր բազմանկյան կարելի է արտագծել շրջանագիծ և այն էլ միայն մեկը, ինչպես նաև, որ ցանկացած կանոնավոր բազմանկյան կարելի է ներգծել շրջանագիծ և դարձյալ միայն մեկը (նկ. 19.1):



նկ. 19.1

Գիտենք նաև, որ կանոնավոր բազմանկյանը ներգծած և արտագծած շրջանագծերի կենտրոնները համընկնում են, և այդ կետը կոչվում է կանոնավոր բազմանկյան կենտրոն:

19.2. Շրջանագծին ներգծած և արտագծած կանոնավոր n -անկյունների պարագծերի հատկությունները: Պարզվում է, որ շրջանագծին ներգծած կանոնավոր n -անկյան պարագիծը օժտված է մոնոտոնության հատկությամբ:

Թեորեմ 19.1: **Շրջանագծին ներգծած կանոնավոր բազմանկյան պարագիծը մեծանում է կանոնավոր բազմանկյան կողմերի թիվը կրկնապատկելիս:**

Այսինքն, եթե P_n -ով նշանակենք տրված շրջանագծին ներգծած կանոնավոր n -անկյան պարագիծը, որտեղ $n=3, 4, \dots$, ապա

$$P_n < P_{2n}:$$

Ապացուցում: Դիցուք տրված է շրջանագիծ և նրան ներգծած կանոնավոր n -անկյուն: Այդ շրջանագծին ներգծած կանոնավոր $2n$ -անկյուն կառուցելու համար մենք կանոնավոր n -անկյան յուրաքանչյուր կողմը փոխարինում ենք բեկյալով: Ասենք, $[AB]$ կողմը կփոխարինենք AKB բեկյալով, որտեղ K -ն կիսում է AB աղեղը (նկ. 19.2): Ըստ եռանկյան անհավասարության՝

$$|AB| < |AK| + |KB|,$$

հետևաբար՝

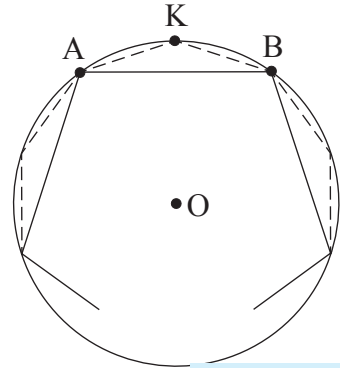
$$P_n = n \cdot |AB| < n \cdot (|AK| + |KB|) = P_{2n}:$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Նկատենք, որ տեղի ունի ավելի ընդհանուր պնդում. **տրված շրջանագծին ներգծած կանոնավոր $(n+1)$ -անկյան պարագիծը մեծ է այդ շրջանագծին ներգծած կանոնավոր n -անկյան պարագծից**, այսինքն՝

$$P_n < P_{n+1}:$$

Հակառակ պնդումը տեղի ունի տրված շրջանագծին արտագծած կանոնավոր n -անկյունների պարագծերի համար:



Նկ. 19.2

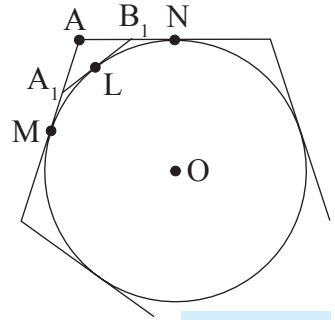
Թեորեմ 19.2: **Շրջանագծին արտագծած կանոնավոր բազմանկյան պարագիծը փոքրանում է կանոնավոր բազմանկյան կողմերի թիվը կրկնապատկելիս:**

Այսինքն՝ եթե Q_n -ով նշանակենք տրված շրջանագծին արտագծած կանոնավոր n -անկյան պարագիծը, որտեղ $n=3, 4, 5, \dots$, ապա

$$Q_n > Q_{2n}:$$

Ապացուցում: Դիցուք տրված է շրջանագիծ և նրան արտագծած կանոնավոր n -անկյուն (նկ. 19.3): Այդ շրջանագծին կանոնավոր $2n$ -անկյուն արտագծելու համար պետք է կանոնավոր n -անկյան և շրջանագծի շոշափման յուրաքանչյուր երկու հարևան կետերով որոշված աղեղը տրոհել երկու հավասար մասերի և տրոհման կետով տանել շրջանագծին

շոշափող: Ասենք, M -ը և N -ը կանոնավոր n -անկյան և շրջանագծի շոշափման երկու հարևան կետեր են: L կետով, որը կիսում է MN աղեղը, տանենք շրջանագծին շոշափող ուղիղ, որի հատման կետերը կանոնավոր n -անկյան կողմերի հետ նշանակենք A_1 -ով և B_1 -ով (նկ. 19.3):



սկ. 19.3

Այնուհետև MAN բեկյալը փոխարինենք MA_1B_1N բեկյալով: Ըստ եռանկյան անհավասարության՝

$$|A_1A| + |AB_1| > |A_1B_1|,$$

հետևաբար՝

$$|MA| + |AN| = |MA_1| + |A_1A| + |AB_1| + |B_1N| > |MA_1| + |A_1B_1| + |B_1N|:$$

Որտեղից հետևում է՝

$$Q_n = n(|MA| + |AN|) > n(|MA_1| + |A_1B_1| + |B_1N|) = Q_{2n}:$$

Թեորեմն ապացուցված է:

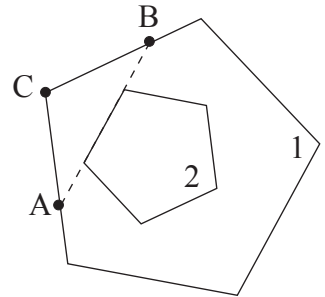
Այս դեպքում դարձյալ տեղի ունի ավելի ընդհանուր պնդում. տրված շրջանագծին արտագծած կանոնավոր $(n+1)$ -անկյան պարագիծը փոքր է այդ շրջանագծին արտագծած կանոնավոր n -անկյան պարագծից, որտեղ $n=3, 4, 5, \dots$, այսինքն՝

$$Q_n > Q_{n+1}:$$

19.3. Շրջանագծին ներգծած կանոնավոր n -անկյունների պարագծերի սահմանափակությունը: Դիտարկենք երկու ուռուցիկ բազմանկյուն, որոնցից մեկը, համարենք այն երկրորդ, ընկած է առաջինի ներքին տիրույթում (նկ. 19.4): Այդ դեպքում՝

$$P_1 > P_2,$$

որտեղ P_1 -ը առաջին բազմանկյան պարագիծն է, իսկ P_2 -ը՝ երկրորդ:



սկ. 19.4

Իսկապես, նկատենք, որ ներսի բազմանկյունը կարող ենք ստանալ՝ կատարելով մեծ բազմանկյան կտրատում: Օրինակ, եթե կտրենք ուղղի երկայնքով, որը նկ. 19.4-ում պատկերված է որպես ընդհատ գիծ, ապա ACB բեկյալը կփոխարինենք B հատվածով: Իսկ քանի որ $|AC| + |BC| > |AB|$, ուրեմն կտրտման արդյունքում ստացված բազմանկյան պարագիծը կլինի ավելի փոքր, քան սկզբնական բազմանկյան պարագիծը: Քանի որ վերջավոր թվով քայլերից հետո մենք կստանանք երկրորդ բազմանկյունը, ուրեմն նրա պարագիծը ավելի փոքր է, քան առաջին բազմանկյան պարագիծը:

Պնդումն ապացուցված է:

Հետևանք: Տրված շրջանագծին ներգծած կանոնավոր n -անկյան պարագիծը փոքր է այդ շրջանագիծը արտագծած որևէ կանոնավոր բազմանկյան պարագծից: Այսինքն, եթե Q_k -ն տրված շրջանագծին արտագծած կանոնավոր բազմանկյան պարագիծն է ($k \geq 3$), ապա

$$P_n < Q_k$$

բոլոր $n \geq 3$ -ի համար:

19.4. Շրջանագծին ներգծած կանոնավոր n -անկյան պարագիծը

Թեորեմ 19.3: **R շառավիղով շրջանագծին ներգծված կանոնավոր n -անկյան պարագիծը որոշվում է**

$$P_n = 2n \cdot R \cdot \sin \frac{180}{n} \quad \text{բանաձևով:}$$

Ապացուցում: Դիցուք P_n -ը R շառավիղով շրջանագծին ներգծած կանոնավոր n -անկյան պարագիծն է: Դիցուք $[AB]$ -ն կանոնավոր n -անկյան կողմերից մեկն է (նկ. 19.5): Քանի որ կանոնավոր n -անկյան գագաթները շրջանագիծը տրոհում են n հավասար մասերի, հետևաբար

$$\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}: \text{ Տանենք } AOB \text{ հավասարասրուն}$$

եռանկյան գագաթից $[OD]$ բարձրությունը: ADO

ուղղանկյուն եռանկյունուց ունենք՝

$$|AD| = R \cdot \sin \frac{180}{n},$$

Հետևաբար՝

$$P_n = n \cdot |AB| = 2n \cdot |AD| = 2n \cdot R \cdot \sin \frac{180}{n}:$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Հետևանք: R շառավիղով շրջանագծին ներգծած կանոնավոր n -անկյան կողմի երկարությունը a_n -ը որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

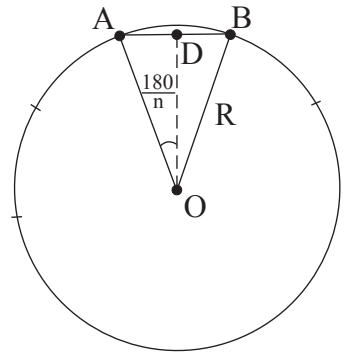
$$a_n = 2R \cdot \sin \frac{180}{n}:$$

Մասնավորապես. 1) R շառավիղով շրջանագծին ներգծած կանոնավոր եռանկյան կողմի երկարությունը հավասար է՝

$$a_3 = 2R \cdot \sin \frac{180^\circ}{3} = 2R \cdot \sin 60^\circ = R\sqrt{3}:$$

2) R շառավիղով շրջանագծին ներգծած քառակուսու կողմի երկարությունը հավասար է՝

$$a_4 = 2R \cdot \sin \frac{180^\circ}{4} = 2R \cdot \sin 45^\circ = R\sqrt{2}:$$



Նկ. 19.5

3) R շառավիղով շրջանագծին ներգծած կանոնավոր վեցանկյան կողմի երկարությունը հավասար է՝

$$a_6 = 2R \cdot \sin \frac{180^\circ}{6} = 2R \cdot \sin 30^\circ = R :$$

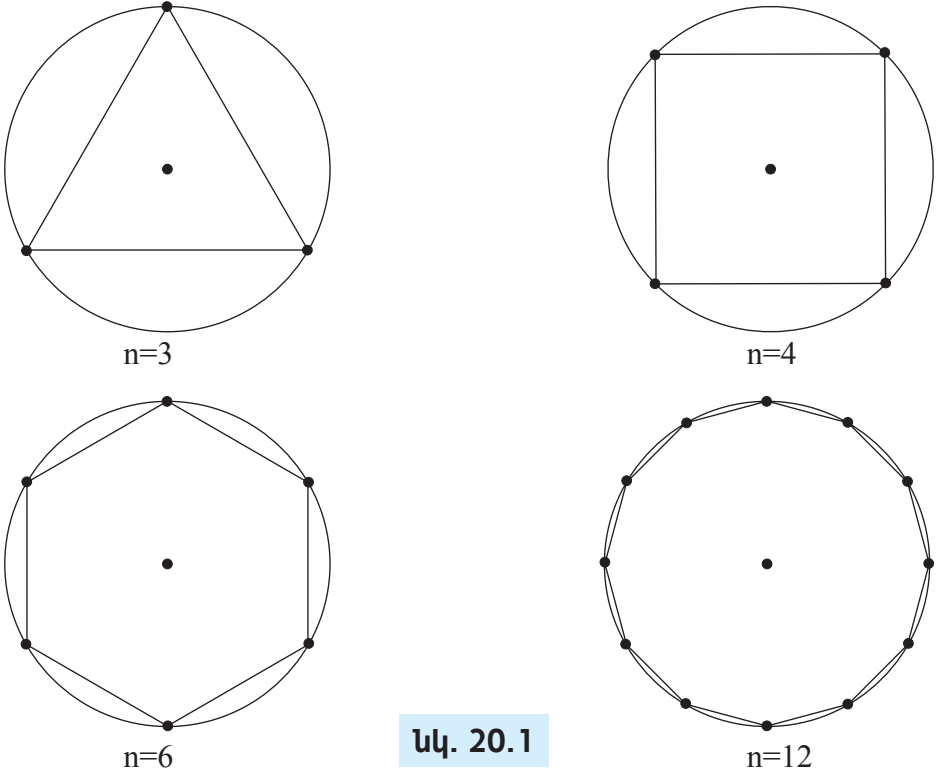
Առաջադրանքներ և խնդիրներ

336. Քանի՞ կողմ ունի կանոնավոր n-անկյունը, եթե նրա անկյան աստիճանային մեծությունը 140° է:
337. Քանի՞ կողմ ունի կանոնավոր n-անկյունը, եթե նրա արտաքին անկյան մեծությունը 20° է:
338. Գտե՛ք կանոնավոր n-անկյան արտաքին անկյունների գումարը (յուրաքանչյուր գագաթից վերցված է մեկական արտաքին անկյուն):
339. Ո՞ր կանոնավոր n-անկյունների կողմն ավելի մեծ է, քան նրան արտագծած շրջանագծի շառավիղը:
340. Գտե՛ք և համեմատե՛ք միավոր շրջանագծին ներգծած կանոնավոր եռանկյան, քառակուսու և կանոնավոր վեցանկյան պարագծերը:
341. 10սմ շառավիղով շրջանագծին ներգծած է կանոնավոր եռանկյուն: Գտե՛ք այդ եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը:
342. Շրջանագծի շառավիղը $\sqrt{3}$ սմ է: Գտե՛ք նրան արտագծած կանոնավոր 6-անկյան պարագիծը:
343. 10սմ շառավիղով շրջանագծին արտագծած է քառակուսի: Գտե՛ք այդ քառակուսուն արտագծած շրջանագծի շառավիղը:
344. Գտե՛ք կանոնավոր n-անկյան կենտրոնի հեռավորությունը նրա կողմից, եթե կողմի երկարությունը a է:
345. Գտե՛ք կանոնավոր 5-անկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը, եթե նրա արտագծած շրջանագծի շառավիղը R է:
346. Գտե՛ք կանոնավոր n-անկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը, եթե նրան արտագծած շրջանագծի շառավիղը R է:
347. Գտե՛ք կանոնավոր 5-անկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը, եթե նրա կողմի երկարությունը a է:
- 348*. Ապացուցե՛ք, որ շրջանագծին ներգծած բոլոր եռանկյուններից ամենամեծ պարագիծն ունի կանոնավոր եռանկյունը:
- 349*. Ապացուցե՛ք, որ տրված շրջանագծին ներգծած բոլոր n-անկյուններից ամենամեծ պարագիծն ունի կանոնավոր n-անկյունը:

§ 20. ՇՐՋԱՆԱԳԾԻ ԵՎ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՍՂԵՂԻ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Դիցուք տրված է որևէ շրջանագիծ: Դիտարկենք այդ շրջանագծին ներգծած կանոնավոր n-անկյունները, որտեղ n-ը ընդունում է որոշ արժեքներ՝ 3, 4, 5, 6 և այլն: Կարելի է նկատել, որ n-ի մեծացմանը զուգընթաց կանոնավոր բազմանկյուններն ավելի ու ավելի են «մոտենում» շրջանա-

գծին (նկ. 20.1): Ըստ էության բավական մեծ n -երի դեպքում կանոնավոր n -անկյունը գործնականում չի տարբերվում շրջանագծից: Հետևաբար կարող ենք համարել, որ նրա պարագիծը մոտավորապես համընկնում է այդ շրջանագծի երկարության հետ: Այս տրամաբանությամբ էին շարժվում մաթեմատիկոսները հնում, երբ փորձում էին գտնել տրված շրջանագծի երկարությունը:



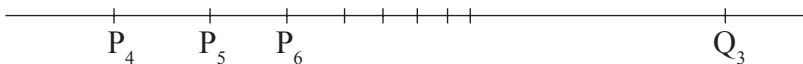
Նկ. 20.1

20.1. Շրջանագծի երկարությունը և կանոնավոր n -անկյունները

Դիտարկենք տրված շրջանագծին ներգծած կանոնավոր n -անկյունները: Նախորդ պարագրաֆում մենք պարզեցինք, որ կանոնավոր n -անկյունների պարագծերը աճում են, այսինքն՝

$$P_3 < P_4 < P_5 < P_6 < P_7 < P_8 < \dots,$$

որտեղ P_n -ը տրված շրջանագծին ներգծած կանոնավոր n -անկյան պարագիծն է: Մենք պարզեցինք նաև, որ թվերի այս հաջորդականությունը սահմանափակ է վերևից, այսինքն՝ $P_n < Q_3$ (նկ. 20.2),



Նկ. 20.2

որտեղ Q_3 -ը տրված շրջանագծին արտագծած կանոնավոր եռանկյան պարագիծն է: Հետևաբար կա այնպիսի մի թիվ, որին անվերջ մոտենում են կանոնավոր n -անկյան պարագծերը n -ի մեծացմանը զուգընթաց:

Սահմանում

Այն թիվը, որին անվերջ մոտենում են տրված շրջանագծին ներգծած կանոնավոր n -անկյան պարագծերը, կանվանենք այդ շրջանագծի երկարություն:

Նկատենք, որ նույն հաջողությամբ մենք կարող ենք դիտարկել տրված շրջանագծին արտագծած կանոնավոր n -անկյունների պարագծերը: Գիտենք նաև, որ n -ի մեծացմանը զուգընթաց նրանց պարագծերը փոքրանում են, այսինքն՝

$$Q_3 > Q_4 > Q_5 > \dots,$$

որտեղ Q_n -ը տրված շրջանագծին արտագծած կանոնավոր n -անկյան պարագիծն է: Հետևաբար կա մի թիվ (0-ից տարբեր, որովհետև, օրինակ, $Q_n > P_4$), որին անվերջ մոտենում են այդ թվերը, n -ի մեծացմանը զուգընթաց:

Պարզվում է, որ տրված շրջանագծին ներգծած կանոնավոր n -անկյունների պարագծերի սահմանային թիվը համընկնում է այդ շրջանագծին արտագծած կանոնավոր n -անկյունների պարագծերի սահմանային թվի հետ: Այս պնդումը ապացուցելու համար ձևակերպենք մի թեորեմ, որը հաստատում է, որ տրված շրջանագծին արտագծած և ներգծած կանոնավոր n -անկյունների պարագծերի տարբերությունը կարող է լինել որքան ասեք փոքր մեծ n -երի դեպքում:

Թեորեմ 20.1:

R շառավիղով շրջանագծին արտագծած կանոնավոր n -անկյան Q_n պարագծի և այդ շրջանագծին ներգծած կանոնավոր n -անկյան P_n պարագծի միջև տեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$Q_n - P_n < \frac{100 \cdot R}{n^2} :$$

Այս թեորեմն ընդունենք առանց ապացույցի:

Թեորեմ 20.1-ից հետևում է, որ տրված շրջանագծին արտագծած կանոնավոր n -անկյունների պարագծերը, n -ի մեծացմանը զուգընթաց, անվերջ մոտենում են այդ շրջանագծի երկարությանը:

20.2. Շրջանագծի երկարությունը: Այսպիսով մենք սահմանեցինք, տրված շրջանագծի երկարությունը այն թիվն է, որին անվերջ մոտենում են այդ շրջանագծին ներգծած կանոնավոր n -անկյունների պարագծերը n -ի մեծացմանը զուգընթաց:

Թեորեմ 20.2:

Շրջանագծի երկարության և նրա տրամագծի հարաբերությունը հաստատուն է բոլոր շրջանագծերի համար:

Ապացուցում: Դիցուք տրված է R_1 շառավիղով շրջանագիծ, որի երկարությունը նշանակենք L_1 -ով, և R_2 շառավիղով շրջանագիծ, որի երկարությունը նշանակենք L_2 -ով: Ապացուցենք, որ

$$\frac{L_1}{2R_1} = \frac{L_2}{2R_2} :$$

Ենթադրենք, թե պնդումը ճիշտ է, և, օրինակ, տեղի ունի

$$\frac{L_1}{2R_1} < \frac{L_2}{2R_2} :$$

Բավականաչափ մեծ n -երի համար L_1 -ը քիչ կտարբերվի առաջին շրջանագծին ներգծած կանոնավոր n -անկյան P_n^1 պարագծից, իսկ L_2 -ը՝ երկրորդ շրջանագծին ներգծած կանոնավոր n -անկյան P_n^2 պարագծից: Հետևաբար չի խախտվի նաև անհավասարությունը, այսինքն՝

$$\frac{P_n^1}{2R_1} < \frac{P_n^2}{2R_2} :$$

Մյուս կողմից շրջանագծին ներգծած կանոնավոր n -անկյան պարագծի բանաձևից ունենք

$$P_n^1 = 2n \cdot R_1 \cdot \sin \frac{180}{n} \text{ և } P_n^2 = 2n \cdot R_2 \cdot \sin \frac{180}{n},$$

որտեղից հետևում է, որ

$$\frac{P_n^1}{2R_1} = \frac{2n \cdot R_1 \cdot \sin \frac{180}{n}}{2R_1} = n \cdot \sin \frac{180}{n} = \frac{2n \cdot R_2 \cdot \sin \frac{180}{n}}{2R_2} = \frac{P_n^2}{2R_2},$$

որը հակասում է մեր ենթադրությանը: Հետևաբար մեր ենթադրությունը ճիշտ է: Թեորեմն ապացուցված է:

Շրջանագծի երկարության և նրա տրամագծի հարաբերությունը հաստատուն թիվ է, որն ընդունված է նշանակել π -ով:

Այսպիսով, **R շառավիղով շրջանագծի L երկարության համար տեղի ունի հետևյալ բանաձևը՝**

$$L = 2\pi R,$$

որտեղ π -ն հաստատուն է:

Բանաձևից հետևում է, որ π -ն միավոր շառավիղով շրջանագծի երկարության կեսն է:

20.3. π հաստատունը: Այսպիսով մենք պարզեցինք, որ π թիվը միավոր շառավիղով շրջանագծի երկարության կեսն է: Այժմ միավոր շառավիղով շրջանագծի մոտարկենք կանոնավոր n -անկյուններով և դիտարկելով նրանց պարագծերի հաջորդականությունը՝ որոշենք π -ն: Այս ճանապարհին կան զանազան բանաձևեր և հնարքներ, որոնք կօգնեն մեզ կատարել հաշվարկները: Օրինակ, այսպես կոչված **կրկնապատկման բանաձևը:**

Պարզվում է, որ միավոր շառավիղով շրջանագծին ներգծած կանոնավոր $2n$ -անկյան P_{2n} պարագիծը կարելի է որոշել նույն շրջանագծին ներգծած կանոնավոր n -անկյան P_n պարագծի միջոցով, հետևյալ բանաձևի օգնությամբ.

$$P_{2n} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{P_n}{n}\right)^2}}} P_n :$$

Այս բանաձևի ապացուցումը առաջադրված է որպես խնդիր:

Այսպիսով, այդ բանաձևի օգնությամբ հաշորդաբար, սկսած $n=4$ -ից, որոշենք P_4 -ը, P_8 -ը, P_{16} -ը, ... :

Հեշտ է գտնել, որ $P_4 = 4\sqrt{2}$ (նկ. 20.3):

Բանաձևի օգնությամբ հաշվենք նաև P_6 -ը, P_{12} -ը, P_{24} -ը, ..., քանի որ դարձյալ հեշտ է գտնել, որ $P_6=6$:

Հաշվարկները ներկայացնենք հետևյալ աղյուսակի միջոցով՝

$$\frac{P_4}{2} = 2,82$$

$$\frac{P_6}{2} = 3$$

$$\frac{P_8}{2} = 3,061$$

$$\frac{P_{12}}{2} = 3,105$$

$$\frac{P_{16}}{2} = 3,121$$

$$\frac{P_{24}}{2} = 3,132$$

$$\frac{P_{32}}{2} = 3,136$$

$$\frac{P_{48}}{2} = 3,139$$

$$\frac{P_{64}}{2} = 3,1403$$

$$\frac{P_{96}}{2} = 3,141$$

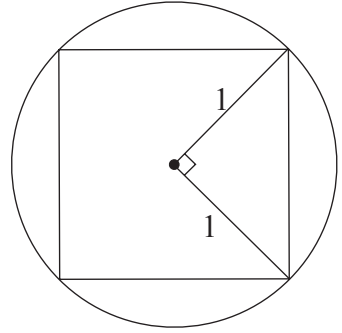
Նկատելի է, որ n -ի մեծացմանը զուգընթաց $\frac{P_n}{2}$ կիսապարագծերը մոտենում են մի թվի, որի տասնորդական, հարյուրերորդական նիշերը հստակ գծագրվում են, դա 3,14...-ն է: Այսպիսով, այս պրոցեսի ընթացքում ծնվում է մաթեմատիկայի կարևորագույն հաստատուններից մեկը՝ $\pi=3,14...$ թիվը:

Շարունակելով այս պրոցեսը՝ մենք կարող ենք որոշել π թիվը ավելի մեծ ճշտությամբ: Հիացմունքի է արժանի մեծն Արքիմեդի կողմից ստացված ճշտության աստիճանը: Նա պարզեց, որ π թիվը ընկած է $3\frac{10}{71}$ և $3\frac{1}{7}$ թվերի միջև: Այսպիսով, նա որոշեց π -ն

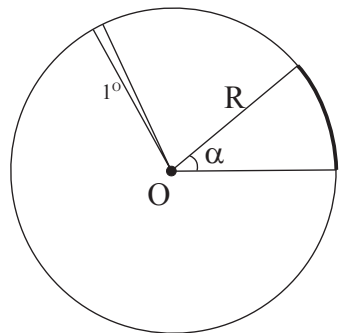
0,001 ճշտությամբ: Մեր օրերում համակարգիչների օգնությամբ հեշտությամբ հաշվում են π թվի մնացած մի քանի տասնյակ նիշեր, որը իհարկե չունի գործնական մեծ նշանակություն: Բավական է միայն հիշել, որ $3,14 < \pi < 3,15$:

20.4. Շրջանային աղեղի երկարությունը:

Դիցուք տրված է R շառավիղով շրջանագիծ, որի վրա պատկերված է α աստիճանային մեծության աղեղ (նկ. 20.4): Որոշենք այդ աղեղի եր-



Նկ. 20.3



Նկ. 20.4

կարությունը: Տրոհենք ամբողջ շրջանագիծը 360 հավասար աղեղների: Պարզ է, որ այդ աղեղները ունեն հավասար երկարություններ, և քանի որ նրանց գումարը հավասար է շրջանագծի երկարությանը, հետևաբար R շառավիղով շրջանագծի 1° մեծությամբ աղեղի երկարությունը հավասար է՝

$$\frac{2\pi \cdot R}{360} = \frac{\pi \cdot R}{180},$$

իսկ R շառավիղով շրջանագծի α աստիճանային մեծության աղեղի երկարությունը, որը նշանակենք L_α -ով, կլինի հավասար՝

$$L_\alpha = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot R}{180} :$$

Առաջադրանքներ և խնդիրներ

350. Գտե՛ք շրջանագծի երկարությունը, եթե նրա՝ ա) շառավիղը հավասար է 7սմ, բ) տրամագծի երկարությունը հավասար է 13սմ:
351. Շրջանագծի երկարությունը հավասար է 18,84սմ: Գտե՛ք՝ ա) այդ շրջանագծի շառավիղը, բ) այդ շրջանագծի տրամագծի երկարությունը:
352. Գտե՛ք երկրագնդի շառավիղը, եթե հասարակածի երկարությունը 40000 կմ է:
353. Ինչպե՞ս կփոխվի շրջանագծի երկարությունը, եթե նրա շառավիղը՝ ա) մեծանա 3 անգամ, բ) փոքրանա 4 անգամ:
354. Ինչպե՞ս կփոխվի շրջանագծի շառավիղը, եթե նրա երկարությունը մեծանա 5 անգամ:
355. Որքանո՞վ կմեծանա շրջանագծի երկարությունը, եթե նրա շառավիղը մեծանա 1 սմ-ով:
356. Պատկերացրե՛ք, որ երկրագնդի հասարակածը ամուր կապված է գոտիով: Այնուհետև այդ գոտու երկարությունը մեծացրին 1մ-ով և դարձյալ պարուրեցին հասարակածը ամենուրեք գետնից միևնույն բարձրության վրա: Կարո՞ղ է արդյոք կատուն անցնել առաջացած ճեղքով: Գտե՛ք գոտու հեռավորությունը գետնից:
357. Շրջանագծի երկարությունը L է: Գտե՛ք նրան ներգծած կանոնավոր վեցանկյան պարագիծը:
358. Գտե՛ք 5սմ ներքնաձիգով հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյանը արտագծած շրջանագծի երկարությունը:
359. Գտե՛ք 8սմ ներքնաձիգով հավասարասրուն ուղղանկյուն եռանկյանը ներգծած շրջանագծի երկարությունը:
360. Ուղղանկյան եռանկյան ներքնաձիգի երկարությունը 10սմ է, իսկ սուր անկյուններից մեկի մեծությունը՝ 30° : Գտե՛ք այդ եռանկյանը ներգծած շրջանագծի երկարությունը:

361*. Ապացուցե՛ք, որ միավոր շառավիղով շրջանագծին ներգծած կանոնավոր $2n$ -անկյան P_{2n} պարագծի և նույն շրջանագծին ներգծած կանոնավոր n -անկյան P_n պարագծի միջև տեղի ունի հետևյալ հավասարությունը՝

$$P_{2n} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{P_n}{n}\right)^2}}} P_n :$$

362. Գտե՛ք 10 սմ շառավիղով շրջանագծի 120° -ի մեծության աղեղի երկարությունը:
363. Շրջանագծի 30° -ի մեծության աղեղի երկարությունը 4 սմ է: Գտե՛ք այդ շրջանագծի 75° -ի մեծության աղեղի երկարությունը:
364. Շրջանագծի աղեղի երկարությունը 15 սմ է, նրա աստիճանային մեծությունը՝ 300° : Գտե՛ք այդ շրջանագծի երկարությունը:
365. Շրջանագծի լարի երկարությունը 15 սմ է, նրան համապատասխան կենտրոնական անկյան մեծությունը՝ 120° : Գտե՛ք այդ լարի ծայրակետերով որոշվող աղեղներից մեծի երկարությունը:
366. Ի՞նչ անկյուն են կազմում երկրագնդի երկու շառավիղները, որոնք տարված են մակերևույթի վրա 1 կմ հեռավորության վրա գտնվող երկու կետերից: Երկրագնդի շառավիղը 6370 կմ է:
367. Գտե՛ք կենտրոնական անկյան մեծությունը, եթե նրան համապատասխան աղեղը կազմում է շրջանագծի երկարության՝
ա) $\frac{1}{3}$ -ը, բ) $\frac{1}{4}$ -ը, գ) $\frac{1}{6}$ -ը:
368. Գտե՛ք 10 սմ երկարության շրջանային աղեղի աստիճանային մեծությունը, եթե շրջանագծի շառավիղը 5 սմ է:

§ 21. ՇՐՋԱՆԻ, ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՍԵԿՏՈՐԻ ԵՎ ՍԵԳՄԵՆՏԻ ՄԱԿԵՐԵՍՆԵՐԸ

21.1. Շրջանի մակերեսը: Այժմ արտաձենք բանաձև R շառավիղով շրջանի մակերեսը հաշվելու համար:

Դիտողություն: Շրջանի շառավիղ ասելով՝ հասկանանք այդ շրջանը եզրագծող շրջանագծի շառավիղը:

Օգտվենք այն եղանակից, որի օգնությամբ մենք սահմանեցինք և հաշվեցինք շրջանագծի երկարությունը: Դիտարկենք R շառավիղով շրջանագծին ներգծած կանոնավոր n -անկյունը, որտեղ $n=3, 4, 5, \dots$, որի մակերեսը նշանակենք S_n -ով: Դիտարկենք նաև նույն շրջանագծին արտագծած կանոնավոր n -անկյունը, որի մակերեսը նշանակենք S'_n -ով (նկ. 21.1): Ինչպես և նախորդ դեպքում, կանոնավոր բազմանկյան կողմերի թիվը կրկնապատկելիս նրա մակերեսը մեծանում է, այսինքն՝

$$S_n < S_{2n},$$

քանի որ կանոնավոր n -անկյունը կարելի է տեղավորել կանոնավոր $2n$ -անկյան ներսում: Այս դեպքում դարձյալ տեղի ունի ավելի ուժեղ պնդում, այն է կամայական $n \geq 3$ համար՝

$$S_n < S_{n+1}.$$

Մյուս կողմից յուրաքանչյուր ներգծված կանոնավոր n -անկյուն ընկած է նույն շրջանագծին արտագծած որևէ կանոնավոր բազմանկյան ներսում: Այսպիսով՝ տրված շրջանագծին ներգծված կանոնավոր n -անկյունների մակերեսները աճում են և սահմանափակ են վերևից, այսինքն՝

$$S_3 < S_4 < S_5 < S_6 < \dots < S_n < \dots$$

Հետևաբար կա այնպիսի մի թիվ, որին անվերջ մոտենում են կանոնավոր n -անկյունների մակերեսները n -ի մեծացմանը զուգընթաց:

Այդ սահմանային թիվը R շառավիղով շրջանի մակերեսն է: Նկատենք, որ տրված շրջանագծին արտագծած կանոնավոր n -անկյունների S'_n մակերեսները նվազում են n -ի մեծացմանը զուգընթաց, և նրանք նույնպես ձգտում են R շառավիղով շրջանի մակերեսին:

Այժմ հաշվենք R շառավիղով շրջանի մակերեսը, որի համար հաշվենք R շառավիղով շրջանագծին ներգծած կանոնավոր n -անկյան մակերեսը: Դիցուք $[AB]$ -ն R շառավիղով շրջանագծին ներգծած կանոնավոր n -անկյան որևէ կողմ է, O -ն՝ այդ շրջանագծի կենտրոնը (նկ. 21.2):

Պարզ է, որ

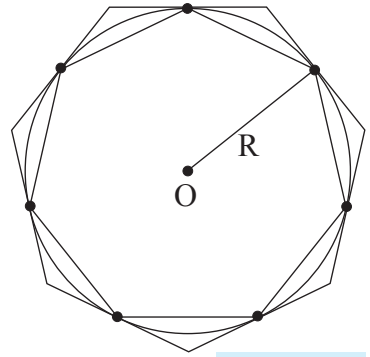
$$S_n = n \cdot S_{AOB} = n \cdot \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |OH| = \frac{1}{2} \cdot P_n \cdot |OH|,$$

որտեղ $[OH]$ -ը AOB եռանկյան բարձրությունն է, իսկ P_n -ը՝ կանոնավոր n -անկյան պարագիծը: Նկատենք, որ n -ի մեծացմանը զուգընթաց $|OH|$ -ը կձգտի շրջանագծի շառավիղին՝ R -ին, իսկ P_n -ը, ինչպես գիտենք, շրջանագծի երկարությանը՝ L -ին: Հետևաբար՝ S_n -ը կձգտի հետևյալ թվին՝

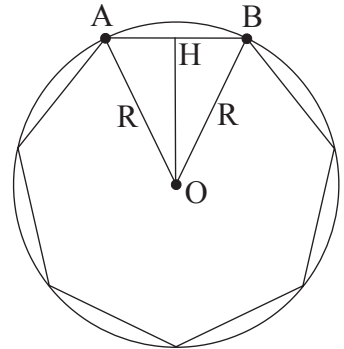
$$\frac{1}{2} \cdot L \cdot R = \frac{2\pi R \cdot R}{2} = \pi R^2:$$

Այսպիսով՝ R շառավիղով շրջանի մակերեսը՝ S -ը, հավասար է՝

$$S = \pi R^2:$$



նկ. 21.1



նկ. 21.2

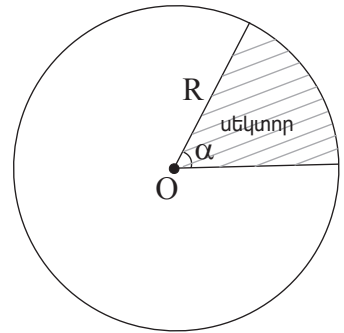
21.2. Շրջանային սեկտորի մակերեսը: Դիտարկենք R շառավիղով շրջան և կենտրոնական անկյուն:

Սահմանում

Շրջանի այն մասը, որն ընկած է կենտրոնական անկյան ներքին տիրույթում, կոչվում է **շրջանային սեկտոր** կամ պարզապես **սեկտոր**:

Շրջանագծի աղեղը, որն ընկած է այդ կենտրոնական անկյան ներքին տիրույթում, կոչվում է սեկտորի աղեղ:

Նկ. 21.3-ում պատկերված է շրջանային սեկտոր, որը համապատասխանում է α մեծության աղեղին: Այդ սեկտորի մակերեսը նշանակենք S_α -ով: Գտնենք բանաձև S_α -ն հաշվելու համար: Ինչպես և աղեղի երկարությունը հաշվելու ժամանակ, այս անգամ ևս ամբողջ շրջանը տրոհենք 360 հատ սեկտորների, որոնցից յուրաքանչյուրի աղեղի մեծությունը 1° է: Այդ սեկտորները իրար հավասար են (նրանցից յուրաքանչյուրը մյուսի վրա կարելի է վերադնել պտույտի օգնությամբ), և քանի որ նրանց բոլորի մակերեսների գումարը հավասար է շրջանի մակերեսին, հետևաբար R շառավիղով շրջանի սեկտորի մակերեսը, որի աղեղի մեծությունը 1° է, հավասար է՝



Նկ. 21.3

$$\frac{\pi R^2}{360},$$

իսկ R շառավիղով շրջանի α մեծության սեկտորի մակերեսը՝ S_α -ն, կլինի՝

$$S_\alpha = \frac{\alpha \cdot \pi R^2}{360}:$$

21.3. Շրջանային սեգմենտի մակերեսը: Դիտարկենք R շառավիղով շրջան:

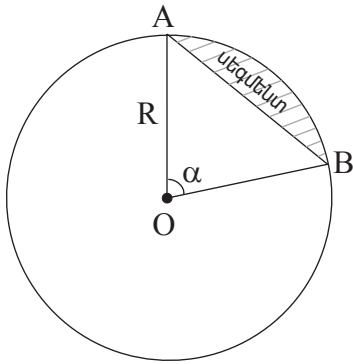
Սեգմենտ կոչվում է շրջանի այն մասը, որը սահմանափակված է աղեղով և աղեղի ծայրակետերը միացնող լարով:

Նկ. 21.4-ում պատկերված է սեգմենտ, որը համապատասխանում է α մեծության աղեղին:

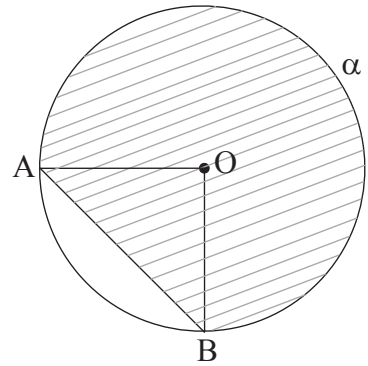
Պարզ է, որ 180° -ից փոքր α մեծության սեգմենտի մակերեսը՝ $S_{\text{սեգ}}$ -ը, կարելի է ստանալ, եթե նույն աղեղին համապատասխան սեկտորի մակերեսից՝ $S_{\text{սեկ}}$ -ից հանենք AOB եռանկյան մակերեսը:

$$\text{Այսպիսով} \quad S_{\text{սեգ}} = S_{\text{սեկ}} - S_{\text{AOB}} = \frac{\alpha \cdot \pi R^2}{360} - \frac{R^2 \cdot \sin \alpha}{2}: \quad (1)$$

$\alpha > 180^\circ$ -ի դեպքում (նկ. 21.5), երբ սեգմենտի աղեղի աստիճանային մեծությունը մեծ է 180° -ից, սեգմենտի մակերեսը որոշելու համար անհրաժեշտ է α մեծությամբ աղեղին համապատասխան սեկտորի մակերեսին գումարել AOB եռանկյան մակերեսը:



Նկ. 21.4



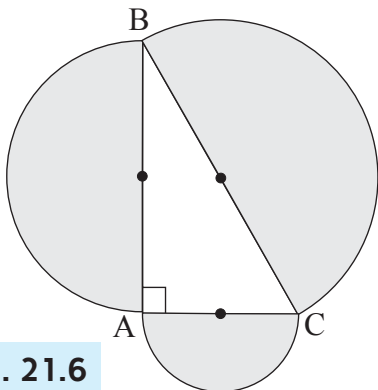
Նկ. 21.5

Նկատենք, որ (1) բանաձևը ճիշտ է նաև $\alpha > 180^\circ$ դեպքում (համոզվե՛ք ինքներդ):

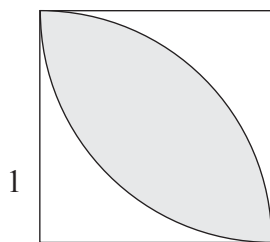
Առաջադրանքներ և խնդիրներ

369. Գտե՛ք շրջանի մակերեսը, եթե՝ ա) նրա շառավիղը հավասար է 5սմ, բ) նրա տրամագծի երկարությունը հավասար է 14սմ:
370. Շրջանի մակերեսը հավասար է 28,26սմ²: Գտե՛ք այդ շրջանի շառավիղը:
371. Ինչպե՛ս կփոխվի շրջանի մակերեսը, եթե նրա շառավիղը՝ ա) մեծանա 3 անգամ, բ) փոքրանա 4 անգամ:
372. Ինչպե՛ս կփոխվի շրջանի շառավիղը, եթե նրա մակերեսը մեծանա 9 անգամ:
373. Որքանո՞վ կփոխվի R շառավիղով շրջանի մակերեսը, եթե նրա շառավիղը մեծացվի 1 միավորով:
374. Համեմատե՛ք 1 միավոր երկարությամբ շրջանագծով սահմանափակված շրջանի և 1 միավոր պարագծով քառակուսու մակերեսները:
375. Շրջանագծի երկարությունը հավասար է L: Գտե՛ք այդ շրջանագծով սահմանափակված շրջանի մակերեսը:
376. Գտե՛ք շրջանագծի երկարությունը, եթե նրանով սահմանափակված շրջանի մակերեսը S է:
377. Գտե՛ք 6սմ կողմով քառակուսուն արտագծած շրջանագծով սահմանափակված շրջանի մակերեսը:
378. Գտե՛ք a կողմով կանոնավոր եռանկյանը արտագծած շրջանագծով սահմանափակված շրջանի մակերեսը:
379. Գտե՛ք 5սմ շառավիղով շրջանագծի 120⁰-ի մեծության աղեղին համապատասխան սեկտորի մակերեսը:
380. Շրջանի սեկտորի մակերեսը 9 սմ² է, նրան համապատասխան աղեղի աստիճանային մեծությունը՝ 120⁰: Գտե՛ք այդ շրջանի շառավիղը:

381. Գտե՛ք կենտրոնական անկյան մեծությունը, եթե նրան համապատասխան սեկտորի մակերեսը կազմում է ամբողջ շրջանի մակերեսի՝ ա) $\frac{1}{3}$ -ը, բ) $\frac{1}{4}$ -ը:
382. Շրջանագծի 30° -ի մեծության աղեղին համապատասխան սեկտորի մակերեսը 4սմ^2 է: Գտե՛ք այդ շրջանագծի 75° -ի մեծության աղեղին համապատասխան սեկտորի մակերեսը:
383. Գտե՛ք 30° -ի աղեղին համապատասխան սեգմենտի մակերեսը, եթե շրջանի շառավիղը 5 սմ է:
384. Շրջանագծի լարի երկարությունը 12 սմ է, իսկ նրան համապատասխան կենտրոնական անկյան մեծությունը՝ 120° : Գտե՛ք այդ լարով որոշվող սեգմենտներից փոքրի մակերեսը:
385. ABC ուղղանկյան եռանկյան կողմերը ընդունելով որպես տրամագծեր կառուցված են կիսաշրջաններ (տե՛ս նկ. 21.6): Ապացուցե՛ք, որ ներքնաձիգի վրա կառուցված կիսաշրջանի մակերեսը հավասար է էջերի վրա կառուցված կիսաշրջանների մակերեսների գումարին:



նկ. 21.6



նկ. 21.7

- 386*. Գտե՛ք երկու միավոր շառավիղներով շրջանների ընդհանուր մասի մակերեսը, որոնց գագաթները գտնվում են միավոր կողմով քառակուսու հանդիպակաց գագաթներում (նկ. 21.7):

§ 22. ՉԼՍՆԻ, ԿՈՆԻ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹՆԵՐԻ ՄԱԿԵՐԵՍՆԵՐԻ ՀԱՇՎՈՒՄԸ

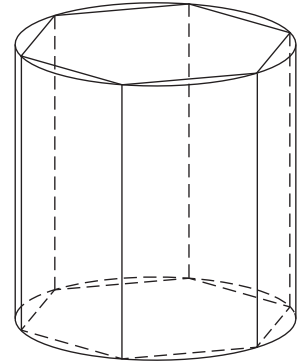
Նախորդ դասարանում մենք ծանոթացանք ուղղանկյունանիստի, պրիզմայի, բուրգի մակերևույթների մակերեսների հաշվման բանաձևերին: Գիտենք նաև, որ կամայական բազմանիստի մակերևույթի մակերեսը հավասար է այդ բազմանիստի նիստեր հանդիսացող բազմանկյունների մակերեսների գումարին: Խնդիրն ավելի բարդ է, երբ տարածական մարմնի մակերևույթը կազմված չէ բազմանկյուններից, իսկ այդպիսի մարմիններ մենք դիտարկում ենք, օրինակ, գլանը և կոնը: Այդպիսով, նախ պետք է սահմանել՝ որն է գլանի, կոնի մակերևույթների մակերեսը: Այս դեպքում մեզ դարձյալ կօգնի այն մոտեցումը, որը մենք

օգտագործեցինք շրջանագծի երկարությունը և շրջանի մակերեսը հաշվելու համար, այն է՝ «մոտարկել» տարածական մարմինը բազմանիստերով, որոնց մակերևույթների մակերեսները կարող ենք հաշվել: Այնուհետև, դիտարկելով այդ մակերեսների հաջորդականությունը, որոշել, թե ինչ թվի են նրանք ձգտում (մոտենում):

22.1. Գլանի մակերևույթի մակերեսը: Դիցուք տրված է գլան (նկ. 22.1): Գլանի մակերևույթը կազմված է կողմնային մակերևույթից և երկու շրջաններից (հիմքերից): Գլանի լրիվ մակերևույթի մակերեսը՝ $S_{\text{լրիվ}}$ -ը, հավասար է կողմնային մակերևույթին՝ $S_{\text{կողմ}}$, գումարած հիմքերի մակերեսները: Այսինքն՝

$$S_{\text{լրիվ}} = S_{\text{կողմ}} + S_{\text{հիմք}}:$$

Քանի որ հիմքերը կազմված են երկու շրջաններից, հետևաբար՝ $S_{\text{հիմք}} = 2\pi R^2$, որտեղ R -ը հիմքի շրջանի շառավիղն է:



նկ. 22.1

Սահմանում

Պրիզման կոչվում է ներգծված գլանին, եթե պրիզմայի հիմքի բազմանկյունը ներգծված է գլանի հիմքի շրջանագծին, իսկ պրիզմայի կողմնային կողմերը գլանի ծնորդներ են:

Նկ. 22.1-ում պատկերված է գլանին ներգծած պրիզմա:

Ուղիղ պրիզման անվանենք **կանոնավոր**, եթե նրա հիմքը կանոնավոր բազմանկյուն է:

Սահմանում

Գլանի կողմնային մակերևույթի մակերես կոչվում է այն թիվը, որին ձգտում են այդ գլանին ներգծված կանոնավոր պրիզմաների կողմնային մակերևույթների մակերեսները, երբ պրիզմաների հիմքերի կանոնավոր բազմանկյունների կողմերի թիվը մեծանում է:

Թեորեմ 22.1:

Գլանի կողմնային մակերևույթի մակերեսը հավասար է այդ գլանի հիմքի շրջանագծի երկարության և նրա ծնորդի արտադրյալին:

Այսինքն՝ եթե գլանի հիմքի շառավիղը R է, իսկ ծնորդի երկարությունը՝ H , ապա

$$S_{\text{կողմ}} = 2\pi RH:$$

Ապացուցում: Դիցուք գլանին ներգծված է կանոնավոր պրիզմա, որի հիմքը կանոնավոր n -անկյուն է: Այդ պրիզմայի կողմնային մակերևույթի մակերեսը՝ S_n -ը, հավասար է՝

$$S_n = P_n \cdot H,$$

որտեղ P_n -ը հիմքին ներգծած կանոնավոր n -անկյան պարագիծն է, H -ը՝ գլանի ծնորդի երկարությունը: Մենք գիտենք, որ կողմերի քանակի՝ n -ի

մեծացմանը զուգընթաց P_n -ը կձգտի գլանի հիմքի շրջանագծի երկարությանը, որը հավասար է $2\pi R$, իսկ H -ը մնում է անփոփոխ: Հետևաբար՝ S_n -երը կձգտեն $2\pi RH$ -ին:

Թեորեմն ապացուցված է:

Դիտողություն: Մենք գլանի կողմնային մակերևույթի մակերեսը որոշելու համար նույն հաջողությամբ կարող էինք օգտվել գլանին արտագծած կանոնավոր պրիզմաներից (սահմանե՞ք ինքնուրույն):

Այսպիսով՝ գլանի լրիվ մակերևույթի մակերեսը հավասար է՝

$$S_{\text{լրիվ}} = S_{\text{կող.}} + S_{\text{հիմք}} = 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R(R + H):$$

Նկատենք, որ եթե կտրենք գլանի կողմնային մակերևույթը նրա որևէ ծնորդով և փռենք հարթության վրա, ապա կստանանք ուղղանկյուն, որի մի կողմի երկարությանը հավասար է գլանի հիմքի շրջանագծի երկարությանը, իսկ մյուս կողմը հավասար է գլանի ծնորդին: Պարզվում է, որ այս գործողության ընթացքում գլանի կողմնային մակերևույթի մակերեսը չի փոխվում, հետևաբար այս ճանապարհով նույնպես մենք կստանայինք գլանի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:

22.2. Կոնի մակերևույթի մակերեսը: Դիցուք տրված է կոն: Կոնի մակերևույթը կազմված է կողմնային մակերևույթից և հիմքից (շրջան): Կոնի լրիվ մակերևույթի մակերեսը՝ $S_{\text{լրիվ}}$ -ը, հավասար է կողմնային մակերևույթին՝ $S_{\text{կող.}}$, գումարած հիմքի մակերեսը: Քանի որ կոնի հիմքը շրջան է, ապա

$$S_{\text{լրիվ}} = S_{\text{կող.}} + \pi R^2,$$

որտեղ R -ը հիմքի շրջանի շառավիղն է:

Սահմանում

Բուրգը կոչվում է ներգծված կոնին, եթե բուրգի հիմքի բազմանկյունը ներգծված է կոնի հիմքի շրջանագծին, իսկ բուրգի գագաթը համընկնում է կոնի գագաթի հետ:

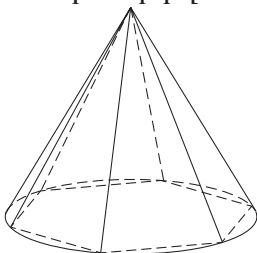
Նկ. 22.2-ում պատկերված է կոնին ներգծած բուրգ:

Սահմանում

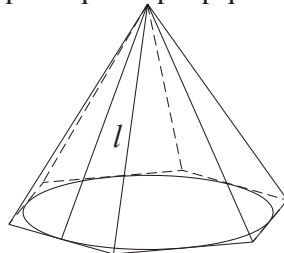
Բուրգը կոչվում է կոնին արտագծված, եթե բուրգի հիմքը արտագծված է կոնի հիմքի շրջանագծին, իսկ բուրգի գագաթը համընկնում է կոնի գագաթի հետ:

Նկ. 22.3-ում պատկերված է կոնին արտագծած բուրգ:

Նկ. 22.2



Նկ. 22.3



Սահմանում

Կոնի կողմնային մակերևույթի մակերես կոչվում է այն թիվը, որին ձգտում են այդ կոնին արտագծած կանոնավոր բուրգերի կողմնային մակերևույթների մակերեսները, երբ բուրգերի հիմքերի կանոնավոր բազմանկյունների կողմերի թիվը մեծանում է:

Թեորեմ 22.2: Կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը հավասար է կոնի հիմքի շրջանագծի երկարության և նրա ծնորդի արտադրյալի կեսին:

Այսինքն՝ եթե կոնի հիմքի շառավիղը R է, իսկ ծնորդի երկարությունը՝ l , ապա

$$S_{\text{կողմ}} = \pi R l:$$

Ապացուցում: Դիցուք կոնին արտագծված է բուրգ, որի հիմքը կանոնավոր n -անկյուն է: Այդ բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը՝ S_n -ը, հավասար է

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot P_n \cdot l$$

որտեղ P_n -ը կոնի հիմքին արտագծած կանոնավոր n -անկյան պարագիծն է, l -ը կոնի ծնորդի երկարությունն է (տե՛ս նկ. 22.3): Գիտենք, որ կողմերի թվի՝ n -ի մեծացմանը զուգընթաց P_n -ը կձգտի կոնի հիմքի շրջանագծի երկարությանը, որը հավասար է $2\pi R$, իսկ l -ը մնում է անփոփոխ:

Հետևաբար S_n -երը կձգտեն $\frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot l = \pi R l$ թվին:

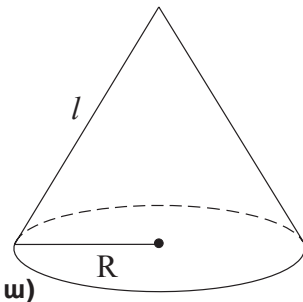
Թեորեմն ապացուցված է:

Դիտողություն: Կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը որոշելու համար նույն հաջողությամբ կարող էինք օգտվել կոնին ներգծված բուրգերի կողմնային մակերևույթների մակերեսների սահմանից:

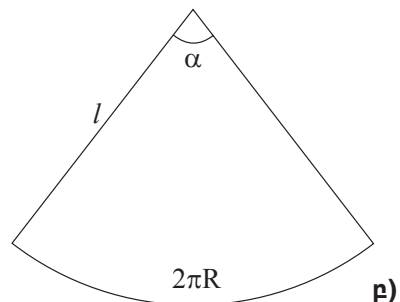
Այսպիսով՝ կոնի լրիվ մակերևույթի մակերեսը հավասար է՝

$$S_{\text{լրիվ}} = S_{\text{կողմ}} + \pi R^2 = \pi R l + \pi R^2 = \pi R(l + R):$$

Նկատենք, որ եթե կտրենք կոնի կողմնային մակերևույթը նրա որևէ ծնորդով և փռենք հարթության վրա, ապա կստանանք l շառավիղով շրջանի սեկտոր, որտեղ l -ը գլանի ծնորդի երկարությունն է: Նկատենք, որ այդ սեկտորի աղեղի երկարությունը կլինի հավասար կոնի հիմքի շրջանագծի երկարությանը (նկ. 22.4բ):



նկ. 22.4



Պարզվում է, որ այս գործողության ընթացքում կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը չի փոխվում, հետևաբար այս կերպ նույնպես կստանանք կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսի հաշվման բանաձևը:

Առաջադրանքներ և խնդիրներ

387. Գլանի հիմքի շառավիղը 5 սմ է, իսկ ծնորդի երկարությունը՝ 7սմ: Գտե՛ք գլանի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:
388. Գլանի կողմնային մակերևույթը ծնորդով կտրելուց և հարթության վրա փռելուց հետո ստացվեց 7 սմ և 5 սմ կողմերով ուղղանկյուն: Գտե՛ք գլանի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:
389. Գլանի հիմքի շառավիղը 5 սմ է, իսկ լրիվ մակերևույթի մակերեսը՝ 251,2 սմ²: Գտե՛ք գլանի ծնորդի երկարությունը:
390. Գլանի կողմնային մակերևույթի մակերեսը 31,4 սմ² է: Գտե՛ք նրա առանցքային հատույթի մակերեսը:
391. Գլանի առանցքային հատույթի մակերեսը 12 սմ² է: Գտե՛ք գլանի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:
392. Գլանին ներգծված կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայի կողմնային մակերևույթի մակերեսը 15 սմ² է: Գտե՛ք գլանի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:
393. Գտե՛ք գլանին արտագծված կանոնավոր եռանկյուն պրիզմայի կողմնային մակերևույթի մակերեսը, եթե գլանի կողմնային մակերևույթի մակերեսը 10 սմ² է:
394. Դասավորե՛ք աճման կարգով գլանի կողմնային մակերևույթի S մակերեսը, այդ գլանին ներգծված և արտագծված պրիզմայի կողմնային մակերևույթների համապատասխանաբար $S_{\text{ն}}$ և $S_{\text{ա}}$ մակերեսները:
395. Գտե՛ք գլանի լրիվ մակերևույթի մակերեսը, եթե նրա առանցքային հատույթը քառակուսի է, իսկ ծնորդի երկարությունը՝ 8 սմ:
396. Կոնի հիմքի շառավիղը 5 սմ է, իսկ ծնորդի երկարությունը՝ 8 սմ: Գտե՛ք կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:
397. Կոնի կողմնային մակերևույթը նրա որևէ ծնորդով կտրելուց և հարթության վրա փռելուց հետո ստացվեց 7 սմ շառավիղով և 120° մեծության աղեղով սեկտոր: Գտե՛ք կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:
398. Կոնին արտագծված կանոնավոր եռանկյուն բուրգի կողմնային մակերևույթի մակերեսը 15 սմ² է: Գտե՛ք կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:
399. Կոնի առանցքային հատույթի մակերեսը 12 սմ² է: Գտե՛ք կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը, եթե առանցքային հատույթի հիմքին առընթեր անկյան մեծությունը 60° է:

400. Կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը $31,4 \text{ սմ}^2$ է: Գտե՛ք նրա առանցքային հատույթի մակերեսը, եթե այդ հատույթի հիմքին առընթեր անկյան մեծությունը 30° է:
401. Դասավորե՛ք աճման կարգով կոնի կողմնային մակերևույթի S մակերեսը, այդ կոնին ներգծված և արտագծված բուրգերի կողմնային մակերևույթների համապատասխանաբար $S_{\text{ն}}$ և $S_{\text{ա}}$ մակերեսները:
402. Գտե՛ք կոնի լրիվ մակերևույթի մակերեսը, եթե նրա առանցքային հատույթը հավասարակողմ եռանկյուն է, իսկ ծնորդի երկարությունը՝ 8 սմ :
403. Կոնի հիմքի շառավիղը 10 սմ է, իսկ կողմնային մակերևույթի մակերեսը՝ $251,2 \text{ սմ}^2$: Գտե՛ք կոնի ծնորդի երկարությունը:

§ 23. ՊՄՐԱԾԱՐ ՄԱՐՄՆԻ ԾԱՎԱԼԻ ՄԱՍԻՆ

Առօրյա գործերում մենք հաճախ ենք օգտագործում **ծավալ** բառը և կարծես հասկանում ենք՝ ինչի մասին է խոսքը: Օրինակ՝ ջրավազանի ծավալը 100 խորանարդ մետր է, անոթի ծավալը 3 լ է և այլն: Իսկ ի՞նչ է ծավալը: Այս պարագրաֆում մենք կտանք ծավալի մասին սկզբնական տեղեկություններ և կստանանք բանաձևեր, որոնց օգնությամբ կհաշվենք պարզագույն մարմինների ծավալները:

23.1. Մարմնի ծավալը: Մենք գիտենք, որ հարթ պատկերն ունի մակերես, իսկ տարածական մարմինը՝ ծավալ: Դիցուք տրված է որևէ տարածական մարմին, և մենք պետք է սահմանենք նրա ծավալը, այսինքն՝ այդ մարմնին վերագրենք մի թիվ:

Ինչպես պատկերի մակերեսը չափելիս, այնպես էլ մարմնի ծավալը չափելու համար մեզ անհրաժեշտ է ունենալ ծավալի չափման միավոր՝ մարմին, որի ծավալը կընդունենք միավոր:

Սահմանում

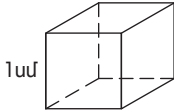
1 միավոր կողով խորանարդի ծավալը ընդունենք որպես ծավալի չափման միավոր: Այլ կերպ ասած, 1 միավոր կողով խորանարդի ծավալը հավասար է 1 միավոր ծավալի:

Եթե երկարության միավոր վերցնենք 1 սմ -ը, ապա 1 սմ կողով խորանարդի ծավալը կլինի 1 սմ^3 , իսկ եթե երկարության միավոր վերցնենք 1 մ -ը, ապա 1 մ կողով խորանարդի ծավալը կլինի հավասար 1 մ^3 :

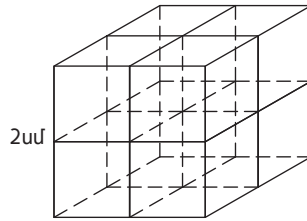
Սահմանում

Տարածական մարմնին վերագրենք մի թիվ, այն կանվանենք այդ մարմնի ծավալ, որը ցույց է տալիս, թե այդ մարմնի մեջ միավոր կողով քանի հատ խորանարդներ ու նրա մասեր են տեղավորվում:

Նկ. 23.1-ում պատկերված է 1 սմ կողով միավոր ծավալի խորանարդ, իսկ նկ. 23.2-ում պատկերված է 2 սմ կողով խորանարդ, որի մեջ տեղավորվում է 8 հատ միավոր խորանարդ: Հետևաբար 2 սմ կողով խորանարդի ծավալը, որը կնշանակեք V տառով, հավասար է 8սմ^3 , այսինքն՝ $V=8\text{սմ}^3$:



նկ. 23.1

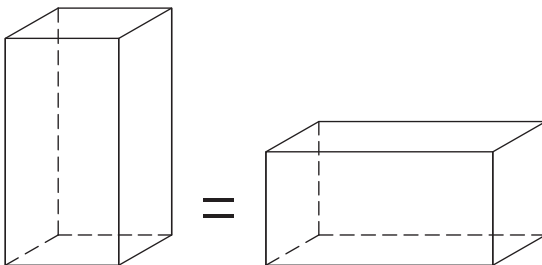


նկ. 23.2

Հնարավոր է, որ մարմնի մեջ միավոր կողով խորանարդներ չտեղավորվեն ամբողջ թիվ անգամ: Այս դեպքում մարմնի ծավալը չափելու համար միավոր կողով խորանարդը կտրոհենք հավասար խորանարդիկների: Եթե 1 կողով խորանարդը տրոհել ենք 1000 հավասար խորանարդիկների, ապա նրանցից յուրաքանչյուրի ծավալը կլինի հավասար $0,001$: Այնուհետև մնում է որոշել, թե տրված մարմնի մեջ քանի հատ միավոր կողով խորանարդ է տեղավորվում և քանի հատ $0,1$ կողով խորանարդ:

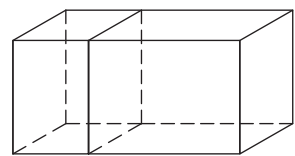
23.2. Ծավալի հատկությունները: Մարմնի ծավալը օժտված է հետևյալ հատկություններով.

1. յուրաքանչյուր մարմնի ծավալը դրական թիվ է,
2. երկու հավասար մարմիններ ունեն հավասար ծավալներ (նկ. 23.3),
3. եթե մարմինը տրոհված է երկու կամ մի քանի մարմինների, ապա նրա ծավալը հավասար է այդ մարմինների ծավալների գումարին (նկ. 23.4):



$$V=V$$

նկ. 23.3



$$V=V_1+V_2$$

նկ. 23.4

Այս հատկությունները հետևում են ծավալի չափման եղանակից: Իրոք, օրինակ, եթե երկու մարմիններ հավասար են, ապա այդ մարմինների մեջ տեղավորվում են հավասար թվով միավոր կողով խորանարդ-

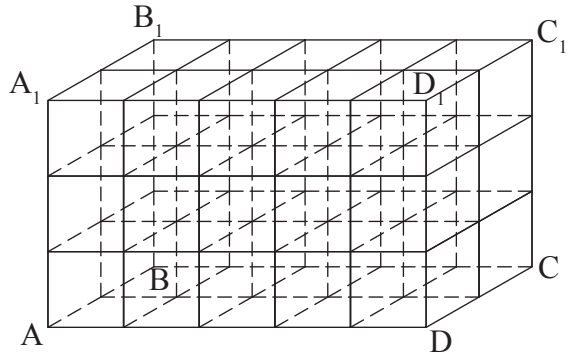
ներ կամ նրանց մասեր: Հետևաբար՝ հավասար մարմիններն ունեն հավասար ծավալներ:

Հետևանք: Եթե երկու մարմիններից մեկը, ասենք երկրորդը, պարունակում է առաջինը, ապա առաջինի ծավալը՝ V_1 -ը, ավելի փոքր է երկրորդի ծավալից՝ V_2 -ից, այսինքն՝

$$V_1 < V_2:$$

23.3. Ուղղանկյունանիստի

Ծավալը: Դիցուք տրված է $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ուղղանկյունանիստը (նկ. 23.5): $ABCD$ ուղղանկյունը անվանենք ուղղանկյունանիստի հիմք, իսկ $[AA_1]$ կողմը՝ բարձրություն: Հիմքի $[AD]$, $[AB]$ կողմերը անվանենք պայմանականորեն երկարություն և լայնություն: Այսպիսով, մենք սահմանեցինք ուղղանկյունանիստի երեք չափումները՝ բարձրությունը, լայնությունը, երկարությունը:



նկ. 23.5

Թեորեմ 23.2: Ուղղանկյունանիստի ծավալը հավասար է նրա երեք չափումների երկարությունների արտադրյալին:

Այսինքն՝ $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ուղղանկյունանիստի ծավալը հավասար է՝

$$V = a \cdot b \cdot c,$$

որտեղ

$$a = |AD|, b = |AB|, c = |AA_1|:$$

Նկատենք, որ a ՝ բարձրությունը, b ՝ լայնությունը, c ՝ երկարությունը չափված են նույն միավորով:

Ապացուցում: Պարզապես պետք է դիտարկել դեպքեր: Մենք սահմանափակվենք միայն մեկ դեպքի դիտարկումով, երբ a -ն, b -ն, c -ն բնական թվեր են: Այս դեպքում, եթե $[AD]$ կողմը բաժանենք a թվով հավասար հատվածների, $[AB]$ կողմը՝ հավասար b թվով հատվածների, իսկ $[AA_1]$ կողմը՝ հավասար c թվով հատվածների, ապա հեշտ է նկատել, ինչպես նկ. 23.5-ում, որ ուղղանկյունանիստը կտրոհվի $a \cdot b \cdot c$ հատ միավոր կողով խորանարդների, այսինքն՝ նրա ծավալը հավասար է $a \cdot b \cdot c$: Մյուս դեպքերը կդիտարկվեն հաջորդ դասարանում: Թեորեմն ապացուցված է:

Հետևանք: a կողով խորանարդի V ծավալը հավասար է՝

$$V = a^3:$$

Առաջադրանքներ և խնդիրներ

404. Գտնեք խորանարդի ծավալը, եթե նրա կողի երկարությունը հավասար է՝ ա) 2սմ , բ) $\frac{1}{2}\text{դմ}$, գ) $\frac{2}{3}\text{մ}$:
405. Գտնեք խորանարդի կողի երկարությունը, եթե նրա ծավալը հավասար է՝ ա) 8սմ^3 , բ) $0,064\text{դմ}^3$, գ) 64մ^3 :
406. Ինչպե՞ս կփոխվի խորանարդի ծավալը, եթե նրա կողը մեծացնենք 3 անգամ:
407. Ինչպե՞ս կփոխվի խորանարդի ծավալը, եթե նրա կողը փոքրացնենք 2 անգամ:
408. Գտնեք խորանարդի ծավալը, եթե նրա նիստերից մեկի մակերեսը 12սմ^2 է:
409. Ապացուցե՛ք, որ 1սմ շառավիղով գնդի ծավալը փոքր է 8սմ^3 -ից:
410. Գտնեք ուղղանկյունանիստի ծավալը, եթե նրա երեք չափումներն են 4սմ , 5սմ և 7սմ :
411. Ինչպե՞ս կփոխվի ուղղանկյունանիստի ծավալը, եթե նրա երկու չափումները մեծացնենք յուրաքանչյուրը 3 անգամ, իսկ մեկ չափումը փոքրացնենք 2 անգամ:
412. Ուղղանկյունանիստի ձև ունեցող երկու ջրավազանների կողերի երկարություններն են համապատասխանաբար 2, 3, 4 և 4, 5, 6: Գտնեք խորանարդի ձև ունեցող ջրավազանի կողի երկարությունը, որի ծավալը հավասար է այդ երկու ջրավազանների ծավալների գումարին:
413. Մարմնի ծավալը 9դմ^3 է: Արտահայտե՛ք այդ մարմնի ծավալը՝ ա) սմ^3 -ով, բ) մ^3 -ով:

Պրակտիկ 3-ի կրկնության հարցեր

1. Ինչպե՞ս կարելի է գտնել առարկայի բարձրությունը, որի հիմքը հասանելի է:
2. Ինչպե՞ս կարելի է գտնել առարկայի բարձրությունը, որի հիմքը հասանելի չէ:
3. Գրե՛ք եռանկյան մակերեսի բանաձևը ըստ երկու կողմերի և նրանցով կազմված անկյան:
4. Գրե՛ք եռանկյան մակերեսի բանաձևը ըստ մեկ կողմի և նրան առընթեր անկյունների:
5. Գրե՛ք եռանկյան մակերեսի բանաձևը ըստ նրա անկյունների մեծությունների և այդ եռանկյանը արտագծած շրջանագծի շառավղի:
6. Գրե՛ք եռանկյան մակերեսի հաշվման բանաձևը ըստ նրա կողմերի երկարությունների և այդ եռանկյանը արտագծած շրջանագծի շառավղի:

7. Գրե՛ք Հերոնի բանաձևը:
8. Գրե՛ք գուգահեռագծի մակերեսի բանաձևը ըստ կից կողմերի երկարությունների և նրանցով կազմված անկյան:
9. Ինչպե՛ս է հաշվվում ուռուցիկ քառանկյան մակերեսը նրա անկյունագծերի երկարություններով և նրանցով կազմված անկյան:
10. Գրե՛ք շրջանագծին արտագծած քառանկյան մակերեսի բանաձևը ըստ շրջանագծի շառավիղի և այդ քառանկյան պարագծի:
11. Ո՞ր բազմանկյուններն են կոչվում կանոնավոր:
12. Ձևակերպե՛ք շրջանագծին ներգծած կանոնավոր n -անկյունների պարագծերի հատկությունները:
13. Ձևակերպե՛ք շրջանագծին արտագծած կանոնավոր n -անկյունների պարագծերի հատկությունները:
14. Գրե՛ք R շառավիղով շրջանագծին ներգծած կանոնավոր n -անկյան պարագծի բանաձևը:
15. Գրե՛ք R շառավիղով շրջանագծի երկարության բանաձևը:
17. Ինչպե՛ս է սահմանվում π հաստատունը և ինչի՞ է հավասար:
18. Գրե՛ք R շառավիղով α մեծության շրջանային աղեղի երկարության բանաձևը:
19. Ինչպե՛ս են որոշում շրջանի մակերեսը:
20. Գրե՛ք R շառավիղով շրջանի մակերեսի բանաձևը:
21. Ո՞րն է շրջանային սեկտորը:
22. Գրե՛ք R շառավիղով շրջանի α մեծության աղեղին համապատասխանող սեկտորի մակերեսի բանաձևը:
23. Ո՞րն է շրջանային սեգմենտը:
24. Գրե՛ք R շառավիղով շրջանի α մեծության աղեղին համապատասխանող սեգմենտի մակերեսի բանաձևը:
25. Ինչպե՛ս են որոշում գլանի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:
26. Գրե՛ք R հիմքի շառավիղով և H ծնորդի երկարությամբ գլանի լրիվ մակերևույթի մակերեսի բանաձևը:
27. Ինչպե՛ս են որոշում կոնի կողմնային մակերևույթի մակերեսը:
28. Գրե՛ք R հիմքի շառավիղով և l ծնորդի երկարությամբ կոնի լրիվ մակերևույթի մակերեսի բանաձևը:
29. Ի՞նչ է մարմնի ծավալը:
30. Ո՞րն է ծավալի չափման միավորը:
31. Ինչպե՛ս են չափում մարմնի ծավալը:
32. Նշե՛ք ծավալի հատկությունները:
33. Գրե՛ք ուղղանկյունանիստի ծավալի բանաձևը:
34. Գրե՛ք խորանարդի ծավալի բանաձևը:

Գլուխ 3-ի լրացուցիչ խնդիրներ

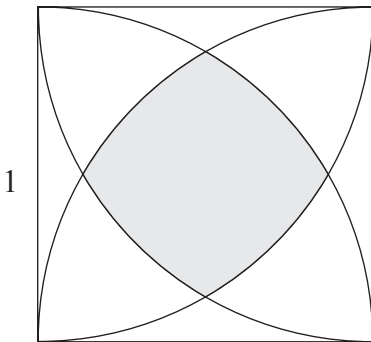
414. Եռանկյան բոլոր բարձրությունների երկարությունները 1-ից փոքր են: Կարո՞ղ է արդյոք նրա մակերեսը մեծ լինել 10 քառակուսի միավորից:
415. Օ-ն ABCD քառանկյան անկյունագծերի հատման կետն է: Ապացուցե՛ք, որ նշված եռանկյունների մակերեսների միջև տեղի ունի հետևյալ առնչությունը՝

$$S_{AOB} \cdot S_{COD} = S_{BOC} \cdot S_{AOD}:$$
416. Տրված են երկու ոչ հավասար եռանկյուններ՝ ABC և $A_1B_1C_1$: Հայտնի է $\angle A = \angle A_1$ և $|BC| = |B_1C_1|$: Ապացուցե՛ք, որ ավելի մեծ պարագիծ ունի այն եռանկյունը, որի մակերեսը մեծ է:
- 417.* Գտե՛ք եռանկյան մակերեսը, որի երկու կողմերի երկարությունները հավասար են 3սմ և 4սմ, իսկ ներգծած շրջանագծի շառավիղը 1սմ է: Քանի՞ լուծում ունի խնդիրը:
418. Միացված են ուռուցիկ քառանկյան հանդիպակաց կողմերի միջնակետերը: Այդ հատվածները քառանկյունը տրոհում են չորս քառանկյունների: Ապացուցե՛ք, որ այդ քառանկյուններից երկու հանդիպակացի մակերեսների գումարը հավասար է մյուս երկուսի մակերեսների գումարին:
419. Շրջանագծին ներգծած կանոնավոր եռանկյան կողմի երկարությունը a է: Գտե՛ք այդ շրջանագծին ներգծած քառակուսու կողմի երկարությունը:
420. Ապացուցե՛ք, որ միավոր շրջանագծին ներգծած կանոնավոր 8-անկյան կողմի երկարությունը հավասար է $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$:
421. Ապացուցե՛ք, որ R շառավիղով շրջանագծին ներգծած կանոնավոր 12-անկյան կողմի երկարությունը հավասար է $R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$:
422. I շառավիղով շրջանագծին ներգծած է ABCDEF կանոնավոր վեցանկյունը: Գտե՛ք ACD եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը:
423. Շրջանագծին ներգծված և արտագծված են կանոնավոր վեցանկյուններ: Գտե՛ք շրջանագծի շառավիղը, եթե այդ վեցանկյունների պարագծերի տարբերությունը $(8\sqrt{3} - 12)$ սմ է:
424. Շրջանագծին ներգծած բազմանկյան բոլոր անկյուններն իրար հավասար են: Ապացուցե՛ք, որ այդ բազմանկյունը կանոնավոր է, եթե նրա կողմերի թիվը կենտ է:
425. Շրջանագծին արտագծած բազմանկյան բոլոր կողմերն իրար հավասար են: Ապացուցե՛ք, որ այդ բազմանկյունը կանոնավոր է, եթե նրա կողմերի թիվը կենտ է:
426. Կանոնավոր բազմանկյան ներքին տիրույթի որևէ O կետի հեռավորություններն այդ բազմանկյան կողմերը պարունակող

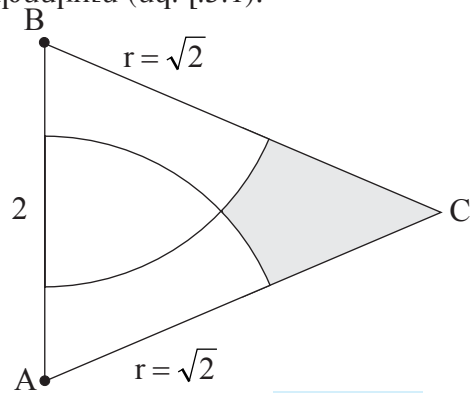
ուղիղներից նշանակենք համապատասխանաբար $h_1, h_2, \dots, h_n$: Ապացուցենք, որ $h_1 + h_2 + \dots + h_n$ գումարը կախված չէ O կետի դիրքից:

427. $A_1 A_2 \dots A_n$ բազմանկյան բոլոր անկյունները հավասար են միմյանց: Ներքին տիրույթի որևէ O կետի հեռավորություններն այդ բազմանկյան կողմերը պարունակող ուղիղներից նշանակենք համապատասխանաբար $h_1, h_2, \dots, h_n$: Ապացուցենք, որ $h_1 + h_2 + \dots + h_n$ -ը կախված չէ O կետի ընտրությունից:
428. Ապացուցենք, որ տրված շրջանագծին ներգծված բոլոր եռանկյուններից ամենամեծ պարագիծն ունի կանոնավոր եռանկյունը:
- 429.* Ապացուցենք, որ տրված շրջանագծին ներգծված բոլոր n -անկյուններից ամենամեծ պարագիծն ունի կանոնավոր n -անկյունը:
430. Տրված է շրջանագիծ և նշված է նրա կենտրոնը: Միայն կարևորն է օգնությամբ այդ շրջանագծին ներգծել կանոնավոր եռանկյուն:
- 431.* Տրված է շրջանագիծ և նշված է նրա կենտրոնը: Միայն կարևորն է օգնությամբ ներգծել այդ շրջանագծին քառակուսի:
432. Ո՞ր պատկերն ունի ավելի մեծ պարագիծ, 1սմ կողմով քառակուսի՞ն, թե՞ շրջանագիծը, որը սահմանափակում է 1սմ² մակերեսով շրջան:
433. Ո՞ր պատկերի մակերեսն է ավելի մեծ, 1 միավոր երկարությամբ շրջանագծով սահմանափակված շրջանի՞ թե՞ կանոնավոր վեցանկյան, որի պարագիծը 1 միավոր է:
434. Շրջանային օղակի մակերեսը $4\pi^2 - 1$ է: Գտե՛ք փոքր շրջանի շառավիղը, եթե մեծ շրջանի շառավիղը հավասար է փոքրի երկարությանը:
435. Կառուցենք շրջան, որի մակերեսը հավասար է տրված երկու շրջանների մակերեսների գումարին:
436. Գտե՛ք շրջանագծի շառավիղը, որի 1° մեծության աղեղի երկարությունը 1սմ է:
437. $[AB]$ -ն և $[CD]$ -ն միավոր շրջանագծի երկու լարեր են: Գտե՛ք AB և CD աղեղների (փոքրերի) հարաբերությունը, եթե $|AB| = \sqrt{2}$, $|CD| = \sqrt{3}$:
438. Շրջանագծին ներգծած քառակուսու կողմը շրջանը տրոհում է երկու սեգմենտների, որոնցից փոքրի մակերեսը հավասար է $(2\pi - 4)$ սմ²: Գտե՛ք այդ քառակուսու կողմի երկարությունը:
439. Գտե՛ք երկու շրջանների ընդհանուր մասի մակերեսը, եթե նրանց շառավիղներն են $\sqrt{3}$ սմ և 3սմ, իսկ կենտրոնների հեռավորությունն է $2\sqrt{3}$ սմ:

440. Գտե՛ք չորս միավոր շառավիղներով շրջանների ընդհանուր մասի մակերեսը, որոնց կենտրոնները գտնվում են միավոր կողմով քառակուսու գագաթներում (նկ. 1.3.1):



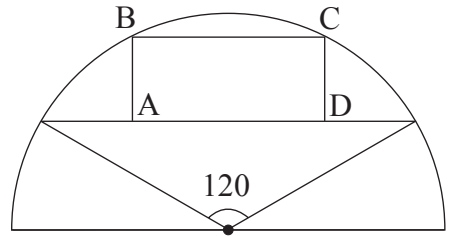
նկ. 1. 3.1



նկ. 1. 3.2

441. 2սմ կողմով ABC եռանկյան A և B գագաթները $\sqrt{2}$ սմ շառավիղներով շրջանների կենտրոններ են: Գտե՛ք եռանկյան այն մասի մակերեսը, որը չի ծածկվում այդ շրջաններով (նկ. 1.3.2):

442. 1 միավոր շառավիղով շրջանագծի վրա տրված է 120° -ի մեծության աղեղ: Այդ աղեղին համապատասխան սեգմենտում ներգծված է ուղղանկյուն ABCD (տես՝ նկ. 1.3.3): Գտե՛ք այդ ուղղանկյան մակերեսը, եթե $|AB|:|BC|=1:4$:



նկ. 1. 3.3

443. Տրված է $[AB]$ տրամագծով կիսաշրջան: AB աղեղի միջնակետից տարված է ուղիղ, որը կիսաշրջանը տրոհում է երկու տիրույթների, որոնց մակերեսները հարաբերում են ինչպես 1:2: Ի՞նչ հարաբերությամբ է տրոհում այդ ուղիղը $[AB]$ տրամագիծը:

Լրացուցիչ խնդիրներ հարթաչափության ամբողջ դասընթացի վերաբերյալ

444. ABC եռանկյան ո՞ր գագաթին է ամենամոտ այդ եռանկյանը ներգծած շրջանագծի կենտրոնը, եթե $\angle A > \angle B > \angle C$:
445. ABC եռանկյան ո՞ր գագաթին է ամենամոտ այդ եռանկյան բարձրությունների հատման կետը, եթե $\angle A > \angle B > \angle C$:
446. ABC եռանկյան ո՞ր կողմին է ամենամոտ այդ եռանկյանը արտագծած շրջանագծի կենտրոնը, եթե $\angle A > \angle B > \angle C$:

447. ABC եռանկյան ո՞ր կողմին է ամենամոտ այդ եռանկյան միջնագծերի հատման կետը, եթե $\angle A > \angle B > \angle C$:
448. Հնարավո՞ր է արդյոք, որ եռանկյան կիսորդներից մեկը տրոհի մյուս կիսորդը երկու հավասար հատվածների:
449. Գտե՛ք ուղղանկյուն եռանկյան փոքր սուր անկյան մեծությունը, եթե ուղիղ անկյան գագաթից տարված միջնագիծը ուղիղ անկյունը տրոհում է 1:4 հարաբերությամբ:
450. Գտե՛ք ուղղանկյուն եռանկյան էջերի երկարությունները, եթե ներքնաձիգին տարված բարձրությունը ներքնաձիգը տրոհում է 4սմ և 9սմ երկարությամբ հատվածների:
451. Ուղղանկյուն եռանկյան էջերի երկարություններն են 8սմ և 15սմ: Գտե՛ք ուղիղ անկյան գագաթի հեռավորությունը այդ եռանկյանը ներգծած շրջանագծի ամենամոտ կետից:
452. Գտե՛ք եռանկյան միջնագծերի հատման կետի հեռավորությունը նրա փոքր կողմից, եթե եռանկյան կողմերի երկարություններն են՝ 9սմ, 40սմ, 41սմ:
453. Գտե՛ք եռանկյան անկյունները, եթե նրա մի գագաթից տարված բարձրությունը և միջնագիծը այդ գագաթի անկյունը տրոհում են երեք հավասար անկյունների:
454. ABC եռանկյան [AB] կողմի վրա տրված է D կետը: Դիցուք H_1 -ը և H_2 -ը ACD և BCD եռանկյունների բարձրությունների հատման կետերն են: Գտե՛ք H_1DH_2 եռանկյան անկյունների մեծությունները, եթե $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 50^\circ$:
455. ABC եռանկյան երկու անկյունների մեծություններն են 40° և 80° : Գտե՛ք այն եռանկյան անկյունների մեծությունները, որի գագաթներն են ABC եռանկյան կողմերի և նրան ներգծած շրջանագծի շոշափման կետերը:
456. ABC եռանկյան կողմերի երկարություններն են՝ $|AC| = 5$ սմ, $|AB| = 7$ սմ, $|BC| = 6$ սմ: Գտե՛ք այդ եռանկյանը արտագծած շրջանագծի [AD] լարի երկարությունը, եթե [AD]-ն անցնում է [BC] կողմի միջնակետով:
457. ABC ուղղանկյուն եռանկյան A գագաթից տարված կիսորդի շարունակությունը հատում է այդ եռանկյանը արտագծած շրջանագիծը K կետում: Գտե՛ք $|AK|$ -ն, եթե $|BC| = 5$ սմ, $\angle B = 90^\circ$, $\angle C = 30^\circ$:
458. Եռանկյան կողմերի և R շառավիղով շրջանագծի հատումից ստացվում են երեք հավասար լարեր, որոնցից յուրաքանչյուրի երկարությունը a է: Գտե՛ք այդ եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը:

459. Ապացուցե՛ք, որ ուղղանկյուն եռանկյանը ներգծած և արտագծած շրջանագծերի տրամագծերի գումարը հավասար է էջերի երկարությունների գումարին:
460. Քառանկյան կողմերի և շրջանագծի հատումից ստացվում են չորս հավասար լարեր: Ապացուցե՛ք, որ այդ քառանկյանը կարելի է ներգծել շրջանագիծ:
461. Ապացուցե՛ք, որ քառանկյան հանդիպակաց կողմերի միջնակետերը միացնող հատվածները և նրա անկյունագծերի միջնակետերը միացնող հատվածը հատվում են մեկ կետում:
- 462*. M-ը ABC հավասարակողմ եռանկյանը արտագծած շրջանագծի կետ է: Ապացուցե՛ք, որ $|MA|$, $|MB|$, $|MC|$ երկարություններից մեկը հավասար է մյուս երկուսի գումարին:
- 463*. Հարթության վրա տրված են ABC եռանկյունը և M կետը: Դիցուք M_1 -ը, M_2 -ը, M_3 -ը M կետի համաչափ կետերն են համապատասխանաբար $[BC]$, $[CA]$ և $[AB]$ կողմերի միջնակետերի նկատմամբ: Ապացուցե՛ք, որ AM_1 , BM_2 և CM_3 ուղիղները հատվում են մեկ կետում:
464. Քառակուսու կողմը ներքնաձիգ է ուղղանկյուն եռանկյան համար, որը գտնվում է այդ քառակուսուց դուրս: Ապացուցե՛ք, որ այդ եռանկյան ուղիղ անկյան գագաթից տարված կիսորդը անցնում է քառակուսու կենտրոնով:
- 465*. ABC հավասարակողմ եռանկյան A գագաթով տարված է g ուղիղը: M-ը և N-ը համապատասխանաբար B և C կետերից g ուղիղին տարված ուղղահայացի հիմքերն են, իսկ K-ն $[BC]$ կողմի միջնակետն է: Ապացուցե՛ք, որ MNK-ն հավասարակողմ եռանկյուն է:
466. Ապացուցե՛ք, որ եռանկյանը արտագծած շրջանագծի կամայական կետից այդ եռանկյան կողմերը պարունակող ուղիղներին տարված ուղղահայացների հիմքերը գտնվում են մի ուղղի վրա:
467. Ապացուցե՛ք, որ եթե եռանկյան երեք բարձրությունների միջնակետերը գտնվում են մի ուղղի վրա, ապա այդ եռանկյունը ուղղանկյուն է:
468. Ապացուցե՛ք, որ շրջանագծին արտագծած ուղղանկյուն սեղանի մակերեսը հավասար է նրա հիմքերի երկարությունների արտադրյալին:
469. Սեղանի հիմքերին զուգահեռ երկու ուղիղներ տրոհում են սեղանի սրունքները երեք հավասար մասերի: Գտե՛ք միջին մասի մակերեսը, եթե մյուս երկու մասերի մակերեսներն են S_1 և S_2 :

470. [AD]-ն [AC] հիմքով ABC հավասարասրուն եռանկյան կիսորդն է: Գտե՛ք $\angle AC$ -ն, եթե ABD և ADC եռանկյունների մակերեսները համապատասխանաբար հավասար են S_1 և S_2 :
471. M-ը ABCD քառակուսու ներքին կետ է: Գտե՛ք $\angle MAD$ անկյան մեծությունը, եթե $\angle MBC = \angle MDB = \alpha$:
472. Տրված է ABCD քառակուսին և նրանից դուրս գտնվող M կետը, որի հեռավորությունը քառակուսու կենտրոնից հավասար է a: Գտե՛ք $|AM| + |BM|$ -ը, եթե $\angle AMB = 90^\circ$:
473. Քառանկյան կողմերի երկարությունները հաջորդաբար հավասար են 4սմ, 5սմ, 6սմ և 7սմ: Տարված է քառանկյան անկյունագծերից մեկը, որը այն տրոհում է երկու եռանկյունների: Գտե՛ք եռանկյուններին ներգծած շրջանագծերի և այդ անկյունագծի շոշափման կետերի հեռավորությունը:
- 474*. ABCD քառակուսու [AB] կողմի վրա տրված է K կետը այնպես, որ $|AK| : |KB| = 1:2$: K կետից ABCD քառակուսուն ներգծած շրջանագծին տարած շոշափողը [AD] կողմը հատում է M կետում: Գտե՛ք $|AM| : |MD|$ -ն:
- 475*. Գտե՛ք ABCD ուռուցիկ քառանկյան անկյունագծերի կազմած անկյունը, եթե $\angle BAC = 40^\circ$, $\angle BCA = 70^\circ$, $\angle BDC = 20^\circ$, $\angle BDA = 35^\circ$:
476. ABC եռանկյան ներսում գտնվող կետից տարված են նրա կողմերին զուգահեռներ, որոնք տրոհում են ABC-ն երեք եռանկյունների և երեք զուգահեռագծերի: Գտե՛ք ABC եռանկյանը ներգծած շրջանագծի շառավիղը, եթե այդ երեք եռանկյուններին ներգծած շրջանագծերի շառավիղները համապատասխանաբար հավասար են a, b և c:
477. Գտե՛ք երկու շոշափող շրջանագծերի շառավիղների հարաբերությունը, եթե նրանք երկուսն էլ շոշափում են α մեծությամբ անկյան կողմերը:
478. [AB]-ն $\sqrt{2}$ շառավիղով շրջանագծի լար է, M-ը՝ այդ շրջանագծի A-ից և B-ից տարբեր որևէ կետ: Գտե՛ք $\angle AMB$ անկյան մեծությունը, եթե $|AB| = 2$: Քանի՞ լուծում ունի խնդիրը:
- 479*. Տարված են շրջանագծի զույգ առ զույգ հատվող երեք լարեր: Հատման կետերով լարերից յուրաքանչյուրը տրոհվում է երեք հավասար հատվածների: Գտե՛ք շրջանագծի շառավիղը, եթե այդ լարերից մեկի երկարությունը $\sqrt{21}$ սմ է:
- 480*. Շրջանագծին արտագծած է [AD] և [BC] հիմքերով ABCD հավասարասրուն սեղանը: M-ը և K-ն այդ շրջանագծի և համապատասխանաբար [AB] և [CD] կողմերի շոշափման կետերն են, իսկ P-ն՝ [AD] կողմի հետ շոշափման կետը: Ի՞նչ հարաբերությամբ է բաժանում [MK] հատվածը BP ուղիղը:

481. ABCD քառակուսու [BC] և [CD] կողմերի վրա տրված են համապատասխանաբար M և K կետեր այնպես, որ $|BM|=|MC|$, $2|ND|=|CN|$: Ապացուցե՛ք, որ $\angle MAN=45^\circ$:
482. Ապացուցե՛ք, որ ABC եռանկյան $[AA_1]$ կիսորդի երկարությունը որոշվում է

$$|AA_1| = \frac{2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{b + c}$$

բանաձևով, որտեղ $\alpha = \angle A$, $b = |AC|$, $c = |AB|$:

483. $[AA_1]$ -ը ABC եռանկյան կիսորդն է: Ապացուցե՛ք, որ

$$|AA_1|^2 = |AB| \cdot |AC| - |A_1C| \cdot |A_1B|:$$

- 484*. Կառուցե՛ք եռանկյուն ըստ երեք բարձրությունների:

- 485*. Հարթության վրա տրված է երեք, մի ուղղի վրա չգտնվող կետ: Կառուցե՛ք եռանկյուն, որի համար այդ կետերը նրա բարձրությունների հիմքերն են: Քանի՞ լուծում ունի խնդիրը:

- 486*. Կառուցե՛ք քառակուսի ըստ մեկական կետերի յուրաքանչյուր կողմերի վրա:

487. Եռանկյանն արտագծած և ներգծած շրջանագծերի շառավիղները համապատասխանաբար հավասար են R և r , իսկ նրանց կենտրոնների միջև հեռավորությունը d է: Ապացուցե՛ք, որ

$$d^2 = R^2 - 2R \cdot r \quad (\text{Էյլերի բանաձևը}):$$

Պատասխաններ և ցուցումներ առաջադրված խնդիրներին

§1.

2. $A(3,0)$; $O(0,0)$; $B(0,4)$: 3. $A(3,0)$; $O(0,0)$; $B(0,-4)$: 4. $(-2,0)$: 5. $(0,-4)$: 6. 3: 7. $(2,2)$; $(2,-2)$; $(-2,-2)$: 8. $D(2,-1)$: 9. $(0,-2)$: 10. $B(-3,4)$: 11. $C(10,-7)$: $D(7,5,-5)$: 12. $M(2,0)$; $N(3,-2)$: 13. $(2,1)$: 14. $5\sqrt{2}$: 15. $6+\sqrt{37}$: 18. $(4,0)$:

§2.

19. B և C կետերը: 20. $(5,12)$ և $(5,-12)$: 23. 2 լուծում՝ $(-2,0)$ և $(4,0)$: 24. $(7,0)$; $(1,0)$: 26. $y+x-2=0$: 27. $\left(0, \frac{8}{7}\right)$, $\left(-\frac{8}{5}, 0\right)$: 28. $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$: 29. $y=2x-7$: 30. -3 :

§3.

32. 2,5սմ, $\sqrt{13}$ սմ, $\sqrt{18,25}$ սմ: 33. 5սմ, 5սմ: 34. $\sqrt{153}$ սմ: 39. $a+b \leq c$:

§4.

41. ա) այո, բ) այո, գ) ոչ: 42. 120° : 43. $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$: 45. 150° : 47. ոչ: 48. երկու լուծում՝ 60° , 120° : 50. ոչ: 51. $\frac{\sqrt{24}}{5}$: 52. $-\frac{\sqrt{24}}{5}$: 53. $\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\frac{3}{\sqrt{10}}$: 54. այո: 55. $\cos 180^\circ < \cos 120^\circ < \cos 90^\circ < \cos 30^\circ$:

§5.

60. ա) այո, բ) ոչ, գ) այո, դ) ոչ: 61. $\sqrt{193}$ սմ, $49\sqrt{2}$ սմ, $\sqrt{74}$ սմ: 63. շեղանկյան: 64. $(5,-6)$: 65. $(-1,3)$: 66. $\sqrt{5}$: 67. $(-2,-1)$: 68. $(-2,4)$: 69. $(0,6)$: 70. $(-8,0)$:

§6.

77. ա) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}$ բ) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DA}$: 78. ա) $\overrightarrow{AK}$ բ) $\overrightarrow{O}$: 79. ա) a , բ) $a\sqrt{3}$, գ) a : 80. ա) $9 > \sqrt{41}$, բ) $-1 < \sqrt{41}$, գ) $9 > \sqrt{41}$: 82. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$: 84. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \frac{3}{4}\vec{a}$, $\overrightarrow{MD} = \frac{1}{4}\vec{a} - \vec{b}$: 85. 0: 87. ա) $3a$, բ) $2\sqrt{3}a$: 88. 10: 89. $(5,8)$; $(6,-12)$; $(-6,12)$:

§7.

92. ա) $(2,4)$, բ) $(-2,-4)$: 93. 2: 94. 2: 95. $\frac{1}{2}$: 96. $\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$: 97. ա) $\sqrt{137}$, բ) $\frac{5}{2}\sqrt{2}$, գ) $\sqrt{313}$: 98. $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$: 100. $(-2,3)$: 101. 90° : 102. 2: 103. 106. Ցուցում. դիտարկեք սեղանի հիմքերը որպես վեկտորներ և արտահայտեք անկյունագծերի միջնակետերը միացնող վեկտորը այդ վեկտորների միջոցով: 107. 3: 108. 180° : 109. 4: 110. 9: 111. -12 : 112. 0: 113. 5: 114. -1 : 115. 90° :

§8.

117. $(-2, -1)$: **118.** $(-2, -1)$: **119.** $(-2, 4)$: **120.** այո: **121.** հատված: **122.** շրջանագիծ: **123.** ոչ:

Գլուխ 1-ի լրացուցիչ խնդիրներ

124. $\bar{O}$: **125.** $\bar{O}$: **129.** $-\frac{a^2}{2}$: **131.** -8 : **132.** AB ուղղին ուղղահայաց B կետով անցնող ուղիղը: **133.** 30° , 60° , 90° : **134.** $\cos A = 0,6$, $\cos B = 0$, $\cos C = 0,8$: **135.** $-\frac{8}{3}$: **140.** $\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$ և $\left(\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$: **141.** $\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$, $\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$:

§9.

144. 14սմ: **145.** ոչ: **146.** 144սմ: **148.** ա) այո, բ) այո, գ) այո, դ) ոչ: **149.** $\frac{3}{2}$: **150.** $\frac{3}{4}$: **151.** 1:2: **153.** $\frac{24}{7}$ սմ: **155.** $\frac{10}{3}$ սմ: **157.** ա) $\frac{m+n}{m}$, բ) $\frac{m+n}{n}$: **158.** 1 սմ, $\frac{4}{3}$ սմ, $\frac{5}{3}$ սմ: **159.** 27սմ, 36սմ: **160.** 120° : **161.** 8սմ, 27սմ:

§10.

162. $\frac{21}{5}$ սմ: **163.** $\frac{28}{65}$ սմ: **164.** $\triangle ABC$ $\triangle CAB$: **165.** այո: **166.** ոչ: **167.** այո: **168.** 70° : **177.** $\frac{65}{5}$ սմ: **178.** $\frac{5}{3}$ սմ: **179.** 3սմ, 5սմ: **180.** 1սմ: **181.** $\sqrt{5}$ սմ:

§11.

182. $\frac{7}{5}$: **183.** 3: **184.** 4: **185.** 100սմ, 40սմ: **186.** $\frac{7}{5}$ սմ: **187.** 8,5սմ: **188.** 12սմ: **189.** $\frac{24}{7}$ սմ: **191.** $\frac{15}{4}$ սմ: **192.** $\frac{3}{2}$: **193.** 9: **194.** 25: **195.** 28սմ²:

§12.

199. ոչ: **200.** այո: **201.** ոչ: **202.** 6սմ, 9սմ, 15սմ: **203.** $\sqrt{ab}$: **205.** $1 + \sqrt{5}$ սմ: **206.** 6սմ, 10սմ:

§13.

211. $\frac{9}{5}$ սմ: **212.** 42սմ: **213.** $\frac{30}{4}$ սմ, $\frac{40}{3}$ սմ: **215.** $\frac{13}{5}$: **216.** $\frac{5}{3}$: **217.** $\frac{28}{11}$ սմ: **218.** 16սմ: **219–222.** Խնդիրներում նախ կառուցե՞ք տրված պատկերներին նման պատկերներ, այնուհետև, օգտվելով ստացված պատկերներից, կառուցե՞ք որոնելին:

§14.

223. $\sqrt{2}$ սմ: **224.** $\frac{11}{2}$ սմ: **225.** 1:6: **226.** 90° : **227.** ոչ: **229.** 4սմ: **230.** 2սմ: **231.** $\frac{16}{5}$ սմ: **232.** 61,8 կմ: **233.** $4\sqrt{2}$ սմ: **235.** սմ: **236.** $\frac{1}{2}$ սմ, $\frac{7}{2}$ սմ: **237.** ոչ: **240.** $\frac{8}{3}$ սմ:

§15.

241. $\sqrt{19}$ սմ: 242. 120° : 243. ա) բութ, բ) սուր, գ) սուր: 244. $\frac{\sqrt{247}}{2}$ սմ:
 245. $\sqrt{99}$ սմ: 246. $\sqrt{46}$ սմ: 249. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$: 250. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$: 251. 45° : 252. $\frac{7 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$: 253. $\frac{3}{\sqrt{2}}$
 սմ: 254. 5 սմ: 255. $R_1 = \frac{a \sin \frac{\beta}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)}$, $R_2 = \frac{a \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)}$: 256. $3 + \sqrt{37}$: 257.
 երկու լուծում՝ 3 սմ, 5 սմ: 258. ա) $|AC| = 5\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, $\angle C = 75^\circ$, $|AB| = \frac{10}{\sqrt{2}} \cdot \sin 75^\circ$:
 259. $a = \frac{\sin \angle A \cdot (a+b)}{\sin \angle A + \sin \angle B}$, $b = \frac{\sin \angle B \cdot (a+b)}{\sin \angle A + \sin \angle B}$:

Գլուխ 2-ի լրացուցիչ խնդիրներ

260. 10սմ: 263. Ցուցում: Տարեք M կետից անկյան կողմերից մեկին
 զուգահեռ ուղիղ, որը անկյան մյուս կողմից կանջատի հատված, որի
 ծայրակետից տեղադրեք այդ հատվածի կեսի չափով հատված: 264. $\frac{21}{8}$:
 266. 4սմ, 9սմ, 10,5սմ: 267. $\frac{3}{2}$: 268. $\frac{2}{9}$: 270. $\frac{14}{5}$ սմ: 271. $\frac{20}{3}$ սմ: 272. $\frac{-3 + \sqrt{149}}{2}$:
 273. ուղղանկյուն: 274. $\frac{21}{8}$ մ: 275. $\frac{20}{3}$ սմ²: 276. $\frac{2ab}{a+b}$: 278. 20° , 40° , 120° :
 280. 6սմ, 9սմ: 281. 16սմ, 20սմ: 282. $\sqrt{ab}$: 285. $\frac{a^3 + a^2b}{b^2 - a^2}$: 290. $\frac{3}{2}$: 291. $3\sqrt{2}$
 սմ: 292. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$: 293. $\frac{7}{2} \cdot \sqrt{\frac{31}{15}}$: 296. 4:

§16.

297. $\frac{10}{\sqrt{3}}$ մ: 298. 5մ: 299. 11,7մ: 300. $\sqrt{3} + 1,7$ մ: 301. $25\sqrt{3} + 76,7$ մ:

§17.

302. $14\sqrt{3}$ սմ²: 303. $8\sqrt{3}$ սմ²: 304. $\frac{49}{4}$ սմ²: 306. 90° : 309. $\frac{16\sqrt{2}}{\cos 15^\circ}$ սմ²: 310.
 $\frac{25\sqrt{3}}{4}$ սմ²: 311. $12\sqrt{26}$ սմ²: 312. 10սմ, 18սմ, 24սմ: 313. $\frac{35}{4\sqrt{6}}$ սմ:

§18.

315. 3սմ, 5սմ: 316. 20սմ²: 317. $\frac{35\sqrt{3}}{2}$ սմ²: 318. $72\sqrt{2}$ սմ²: 319. $\frac{25\sqrt{3}}{2}$ սմ²:
 320. 4սմ: 321. $\frac{21\sqrt{3}}{4}$ սմ²: 323. $14\sqrt{3}$ սմ²: 324. 6սմ²: 325. $24\sqrt{3}$ սմ²: 329. 64սմ²:
 331. $24\sqrt{3}$ սմ²: 332. $\frac{32\sqrt{2}}{\cos 15^\circ}$: 333. 10սմ: 334. 6սմ: 335. 7սմ, 21սմ:

§19.

336. 9: **337.** 18: **338.** 360° : **339.** $n=3, n=4, n=5$: **341.** 5 սմ: **342.** 12 սմ: **343.** $10\sqrt{2}$ սմ: **344.** $\frac{a}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}$: **345.** $R \cdot \cos 36^\circ$: **346.** $R \cos \frac{180^\circ}{n}$: **347.** $\frac{a}{2} \cdot \operatorname{ctg} 36^\circ$:

§20.

350. ա) 14 π սմ, բ) 13 π սմ: **351.** ա) 3սմ, բ) 6սմ: **352.** 6370կմ: **353.** ա) կմեծանա 3 անգամ, բ) կփոքրանա 4 անգամ: **354.** կմեծանա 5 անգամ: **355.** կավելանա 2 π սմ-ով: **356.** այո, քանի որ հեռավորությունը գեանից $\frac{1}{2\pi}$ մ է: **357.** $\frac{3L}{\pi}$: **358.** 5 π սմ: **359.** $8(\sqrt{2}-1)\pi$ սմ: **360.** $5(\sqrt{3}-1)\pi$ սմ: **362.** $\frac{20}{3}\pi$ սմ: **363.** 10սմ: **364.** 18սմ: **365.** $\frac{20\pi}{\sqrt{3}}$ սմ: **366.** $\frac{180^\circ}{6370 \cdot \pi}$: **367.** ա) 120° , բ) 90° գ) 60° : **368.** $\frac{360^\circ}{\pi}$:

§21.

369. ա) 25 π սմ², բ) 49 π սմ²: **370.** 3սմ: **371.** ա) կմեծանա 9 անգամ, բ) կփոքրանա 16 անգամ: **372.** կմեծանա 3 անգամ: **373.** $\pi(2R+1)$ -ով: **374.** 1 միավոր երկարությամբ շրջանագծով սահմանափակված շրջանի մակերեսը մեծ է 1 միավոր պարագծով քառակուսու մակերեսից: **375.** $\frac{L^2}{4\pi}$: **376.** $2\sqrt{S\pi}$: **377.** 18 π սմ²: **378.** $\frac{\pi \cdot a^2}{3}$: **379.** $\frac{25 \cdot \pi}{3}$: **380.** $\sqrt{\frac{27}{\pi}}$ սմ: **381.** ա) 120° , բ) 90° : **382.** 10սմ²: **383.** $\frac{25}{4}\left(\frac{\pi}{3}-1\right)$ սմ²: **384.** $4\pi-3\sqrt{3}$ սմ²: **385.** Յուրյուն: Օգտվելք Պյութագորասի թեորեմից: **386.** $\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$:

§22.

387. 70 π սմ²: **388.** 35սմ²: **389.** 3սմ: **390.** 10սմ²: **391.** 12 π սմ²: **392.** $\frac{10\pi}{\sqrt{3}}$ սմ²: **393.** $\frac{15\sqrt{3}}{\pi}$ սմ²: **394.** $S_u < S < S_w$: **395.** 96 π սմ²: **396.** 40 π սմ²: **397.** $\frac{49\pi}{3}$ սմ²: **398.** $\frac{5\pi}{\sqrt{3}}$ սմ²: **399.** $\frac{12\pi}{\sqrt{3}}$ սմ²: **400.** 5սմ²: **401.** $S_u < S < S_w$: **402.** 48 π սմ²: **403.** 8սմ:

§23.

404. ա) 8սմ³, բ) $\frac{1}{8}$ դմ³, գ) $\frac{8}{27}$ մ³: **405.** ա) 2սմ, բ) 0,4դմ, գ) 4մ: **406.** 27 անգամ կմեծանա: **407.** 8 անգամ կփոքրանա: **408.** $24\sqrt{3}$ սմ³: **410.** 140սմ³: **411.** կմեծանա $\frac{9}{2}$ անգամ: **412.** $2^3\sqrt{18}$ սմ: **413.** ա) 9000սմ³, բ) 0,009մ³:

Գլուխ 3-ի լրացուցիչ խնդիրներ

414. ոչ: 417. խնդիրն ունի երկու լուծում՝ 6սմ^2 և $4 + \sqrt{2}\text{սմ}^2$: 419. $\frac{a}{\sqrt{6}}$:
 422. $\frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3} - 1)$: 423. 2սմ: 430. Ցուցում: Նախ այդ շրջանագծին ներգծե՞ք
 կանոնավոր վեցանկյուն: 432. 1սմ կողմով քառակուսին: 433. 1 միավոր
 երկարությամբ շրջանագծով սահմանափակված շրջանը: 434. $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$: 435.
 Ցուցում: Օգտվե՛ք Պյութագորասի թեորեմից: 436. $\frac{180}{\pi}$ սմ: 437. $\frac{3}{4}$: 438.
 $2\sqrt{2}$ սմ: 439. $\left(\frac{5}{2}\pi - 3\sqrt{3}\right)$ սմ: 440. $\frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}$: 441. $\sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{6}$: 442. $\frac{9}{25}$: 443.
 $\left(3 - \frac{\pi}{2}\right) : \pi$:

Լրացուցիչ խնդիրներ հարթաչափության ամբողջ դասընթացի վերաբերյալ

444. A գագաթին: 445. A գագաթին: 446. [BC] կողմին: 447. [BC]
 կողմին: 448. ոչ: 449. 18° : 450. $2\sqrt{13}$ սմ, $3\sqrt{13}$ սմ: 451. $3(\sqrt{2} - 1)$ սմ: 452. $\frac{40}{3}$
 սմ: 453. 30° , 60° , 90° : 454. 50° , 60° , 70° : 455. 50° , 60° , 70° : 456. $\frac{37}{2\sqrt{7}}$ սմ:
 457. 5սմ: 458. $\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$: 469. $\frac{1}{2} \cdot (S_1 + S_2)$: 470. $\frac{2\sqrt{S_2(S_1 + S_2)}}{\sqrt[4]{4S_1^2 - S_2^2}}$: 471. $90 - 2\alpha$:
 472. $a\sqrt{2}$: 473. 2սմ: 474. 1:3: 475. 75° : 476. $a+b+c$: 477. $\frac{1 - \sin \frac{\alpha}{2}}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}}$: 478. երկու
 լուծում՝ 45° և 135° : 479*. $\frac{7}{3}$ սմ: 480. 1:3: 484. Ցուցում: Օգտվե՛ք նրանից,
 որ եռանկյան կողմերը համեմատական են նրանց տարված բարձրու-
 թյունների հակադարձներին, այսինքն՝ $a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}$:

ԲՈՎԱՆՂԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ԿՈՌՐԴԻՆԱՏՆԵՐ ԵՎ ՎԵԿՏՈՐՆԵՐ 3

§ 1.	ԴԵԿԱՐՏՅԱՆ ԿՈՌՐԴԻՆԱՏՆԵՐ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ	3
§ 2.	ՈՒՂԴԻ ԵՎ ՇՐՋԱՆԱԳԾԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ	8
§ 3.	ԿՈՌՐԴԻՆԱՏՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՐԿՐԱՉԱԺԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԼՈՒԾԵԼԻՍ	12
§ 4.	ԱՆԿՅԱՆ ՍԻՆՈՒՍԸ, ԿՈՍԻՆՈՒՍԸ ԵՎ ՏԱՆԳԵՆՍԸ	14
§ 5.	ՎԵԿՏՈՐՆԵՐ	19
§ 6.	ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ԳՈՒՄԱՐՈՒՄԸ ԵՎ ՀԱՆՈՒՄԸ: ՎԵԿՏՈՐԻ ԲԱՉՄԱՂԱՏԿՈՒՄԸ ԹՎՈՎ	24
§ 7.	ՏԱՐԱԳԻԾ ՎԵԿՏՈՐՆԵՐ: ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՐԿՐԱՉԱԺԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ԼՈՒԾԵԼԻՍ	30
§ 8.	ԳԱՂԱԺԱՐ ՊԱՏԿԵՐԻ ԶՈՒԳԱՇԵՌ ՏԵՂԱԺՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ	38

ՆՄԱՆՈՒԹՅՈՒՆ: ԱՌՆՉՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՌԱՆԿՅԱՆ ԿՈՂՄԵՐԻ ԵՎ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԻՋԵՎ 44

§ 9.	ՆՄԱՆ ԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ	44
§ 10.	ԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՆՄԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆԵՐԸ	50
§ 11.	ՆՄԱՆ ԵՌԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ	54
§ 12.	ՆՄԱՆ ՊԱՏԿԵՐՆԵՐ	58
§ 13.	ՆՄԱՆՈՒԹՅԱՆ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ	63
§ 14.	ՈՒՂԻՂՆԵՐԻ ԵՎ ՇՐՋԱՆԱԳԾԻ ՀԱՏՈՒՄԻՉ ԱՌԱՋԱՅԱԾ ՀԱՏՎԱԾՆԵՐԻ ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆԸ	68
§ 15.	ԱՌՆՉՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ԵՌԱՆԿՅԱՆ ԿՈՂՄԵՐԻ ԵՎ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԻՋԵՎ	72

ԵՐԿՐԱՉԱԺԱԿԱՆ ՄԵԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՇՎՈՒՄՆԵՐ 81

§ 16.	ՉԱԺՈՂԱԿԱՆ ԱՇԽԱՏԱՆՔՆԵՐ	81
§ 17.	ԵՌԱՆԿՅԱՆ ՄԱԿԵՐԵՍԻ ՀԱՇՎՄԱՆ ԱՅԼ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐ	84
§ 18.	ԶՈՒԳԱՇԵՐԱԳԾԻ ԵՎ ԶԱՌԱՆԿՅԱՆ ՄԱԿԵՐԵՍՆԵՐԻ ՀԱՇՎՄԱՆ ԲԱՆԱՁԵՎԵՐ	88
§ 19.	ԿԱՆՈՆԱՎՈՐ ԲԱՉՄԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐ	92
§ 20.	ՇՐՋԱՆԱԳԾԻ ԵՎ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ԱՂԵՂԻ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ	96
§ 21.	ՇՐՋԱՆԻ, ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՄԵԿՏՈՐԻ ԵՎ ՄԵԳՄԵՆՏԻ ՄԱԿԵՐԵՍՆԵՐԸ	102
§ 22.	ՔԼԱՆԻ, ԿՈՆԻ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹՆԵՐԻ ՄԱԿԵՐԵՍՆԵՐԻ ՀԱՇՎՈՒՄԸ	106
§ 23.	ԳԱՂԱԺԱՐ ՄԱՐՄՆԻ ԾԱՎԱԼԻ ՄԱՍԻՆ	111